2013 年度 線形代数 II 期末試験 [2014/02/06]

- 制限時間 60 分（開始後 30 分後より途中退席可，但し試験会場への再入室は認めない.）
- 計算問題は計算手順を明記し，説明問題は明瞭な文章にて論じよ.

$\boxed{1}$行列式は，(1)交代性，(2)多重線形性，(3)単位の定義により規定される.

(a) 方向付き面積（2 次元）が上記の 3 つの性質を満たすことを幾何学的に示せ.

(b) n 次正方行列 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ に対し，i 番目の列ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{a}_i + \lambda \boldsymbol{a}_j$ で置き換えても行列式は変わらないことを上記の性質を用いて示せ.（λ : スカラー、$\boldsymbol{a}_j$: j 番目の列ベクトル($j \neq i$)）

$\boxed{2}$次の線形連立方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) 係数行列の逆行列を計算せよ.

(b) 解 x_1, x_2, x_3 を計算せよ.

$\boxed{3}$次の行列 $\boldsymbol{A}$ を考える.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値を計算せよ.

(b) 固有ベクトルを計算せよ.

(c) $\boldsymbol{A}^n$ を計算せよ.

$\boxed{4}$対称行列 $\boldsymbol{A}$ (${}^t\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$)は以下の性質を満たす.

(i) 固有値は実数となる.

(ii) 固有ベクトルは正規直交基底をなす.

上記の性質を用いて, 対称行列の固有ベクトルからなる行列は逆行列が転置により得られることを示せ.