

1. V は 3×3 実行列の全体とする

任意の $A, B \in V$ に対し 固有値を各々 $\{d_i\}, \{\beta_i\}$ ($i=1, 2, 3$) とすると

$$A \cdot B = (d_1 + d_2 + d_3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

で内積を定めよ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

のとき A, B の内積を求めよ

2. 次の2次曲線のグラフを描け

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 8x + 20y - 32 = 0$$

3. $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ のとき

$A^5 - 4A^4 + 6A^3 - 2A^2 - 8A$ を計算せよ.

1. 2次以下の x の多項式の全体を W , $\{1, x, x^2\}$ を W の基底とする.

$\vec{p} = f(x) \in W$ $\vec{q} = g(x) \in W$ に対し

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

で内積を定めるとき基底 $\{1, x, x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法で

正規直交基底を作れ.

$$p_2 = p_1 \cdot$$

2. n 次行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (重複含む) とする.

任意の多項式 $f(x)$ に対し $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$

であることを証明せよ.

$$(A^2 - 2\lambda_1 A + \lambda_1^2 I) \vec{p} = (A^2 - \lambda_1^2 I) \vec{p} = (3\lambda_1 A - 3\lambda_1^2 I) \vec{p} = (A^2 - 4\lambda_1 A + 6\lambda_1^2 I - 4\lambda_1^2 I) \vec{p} = (A^2 - 4\lambda_1 A + 6\lambda_1^2 I) \vec{p}$$

3. (1) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ とする.

固有値の総和と総積を求めよ. (結果のみか.)

(2) $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ とする. $|e^B|$ を求めよ.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4. 連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = 18y_1 - 12y_2 \\ y_2' = 20y_1 - 13y_2 \end{cases}$$

$$y_2' = 20y_1 - 13y_2$$

を上げ.

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \{ (a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32} + (a_{22}-\lambda)a_{31}a_{13} + (a_{33}-\lambda)a_{12}a_{21} \}$$

$$= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2$$

$$+ (a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{12}a_{31} + a_{32}a_{21} + a_{13}a_{23})\lambda$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) + 4 - [4(1-\lambda) + 2(2-\lambda)] = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 4$$

$$-8\lambda$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)(9+4) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 10\lambda - 12 = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 12) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 12) = -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+3)$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{2}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{52}$$

$$= 1 \pm \sqrt{13}$$

$$\frac{37}{26} = \frac{13}{2}$$