# 物理学IA テスト　2004/7/26　鈴木

[1]
(1) 質量 $m$ の物体の座標は $x(t)=\sqrt{at^3+b\log t}$ とする。($a,b$ : 定数) このとき時刻 $t$ での速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$, 力 $F(t)$ を求めよ。
(2) 質量 $m$ の物体に力 $F(t)=Ae^{at}+B\sin(bt)$ の物体がある。時刻 $t=0$ の時、初速度 $v_0$、位置 $x_0$ とする。($a,b,A,B$ : 定数) このとき時刻 $t$ での速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。

[2] 極座標を使って物体の運動を考える。極座標における単位ベクトルは、直交座標の単位ベクトルを用いて

$$\vec{e_r}=\cos\theta\ \vec{e_x}+\sin\theta\ \vec{e_y}$$
$$\vec{e_\theta}=-\sin\theta\ \vec{e_x}+\cos\theta\ \vec{e_y}$$

で与えられているとする。また位置ベクトルは $\vec{r}=r\vec{e_r}$ と書かれる。ここで $r$, $\theta$ は時間 $t$ の関数とする。このとき、以下の問いに答えよ。
(1) $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ を図示せよ。また極座標における単位ベクトルの時間微分は

$$\dot{\vec{e_r}}=\dot{\theta}\ \vec{e_\theta},\quad \dot{\vec{e_\theta}}=-\dot{\theta}\ \vec{e_r},$$

であることを示せ。
(2) 速度ベクトル、加速度ベクトルを極座標を用いて表せ。
(3) 長さが $l$ の糸の下端に質量 $m$ の物体を取り付け、他端を天井に固定して振り子をつくる。糸の張力を $T$ として、この物体の極座標における運動方程式をつくれ。(天井と糸との交点を原点とし、糸と垂直軸とのなす角を $\theta$ とする。) また振れ角が小さいとして、この運動の解をもとめよ。
(4) $\vec{e_r},\vec{e_\theta}$ が直交し、またそれぞれ長さが1であることを示せ。また極座標における運動エネルギーを求めよ。
(5) 万有引力は

$$\overrightarrow{F(r)}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e_r}$$

で与えられる。これよりポテンシャルを求めよ。また (4) において $h=r^2\dot{\theta}$ として力学的エネルギー $E$ をもとめよ。また有効ポテンシャルを図示せよ。極値も明記せよ。($m,M,h$ は正の定数)
(6) (5) より、力学的エネルギーEの値により運動の種類を場合分けせよ。

[3] 弾性係数 $k$ のバネの一端を天井に固定し、もう一端に質量 $m$ の物体をつないでつるす。垂直上向きに $x$ 軸をとり、バネの自然長での物体の位置を原点とする。また時刻 $t=0$ での初速度を $v_0$, 位置 $x_0$ とする。

(1) 物体の位置を $x(t)$ として運動方程式を作れ。

(2) この運動の解を求め、角速度 $\omega$ と周期 $T$ をもとめよ。

(3) 弾性力と重力をあわせたポテンシャル $U$ を求め、これを図示せよ。またこの図中に力学的エネルギー $E$ を書き込み、運動を論ぜよ。$E$ と $U$ の交点も明記せよ。

(4) この運動に速度 $v$ に比例する空気抵抗 $-bv$ $(b>0)$ が働く場合の運動方程式を作れ。また $b$ の値によって運動の種類の場合分けを行い、それぞれについて $x(t)$ を求めよ。

[4] 物体に働く力が、物体の位置によらず常に物体と一定の点Oを結ぶ直線上に沿って働く力。

(1) 中心力について説明せよ。またこのとき角運動量が保存することを示せ。

(2) 質量 $m$ の物体に糸をつけて、一定の中心力 $F$ を加えて円運動させる。この半径を $r$ とする。このときの遠心力、角速度、角運動量をもとめよ。

[5]

$\vec{f}(x,y,\ )=3x^2y^2\,\vec{e_x}+(2x^3y+2y)\,\vec{e_y}$ は保存力であることを示せ。また、$(0,0)\to(2,0)\to(2,3)$ の経路での仕事を求めよ。さらに、原点を基準点としてポテンシャルを求めよ。

# 物理学IA テスト　2007/7/30　鈴木

**[1]** 弾性係数 $k$ のバネの一端に質量 $m$ の物体をつなぐ。横向きに $x$ 軸をとり、バネの他端を壁に固定し、水平な床の上で $x$ 軸方向に振動させる。(床との摩擦は無視する。) バネの自然長での物体の位置を原点とする。空気抵抗の比例係数を $b$ $(b > 0)$ とする。

(1) $k = 0.8[N/m]$, $m = 0.4[kg]$, $b = 2.4[Ns/m]$ として運動方程式を作り、速度と位置を時間 $t$ の関数として一般解を求めよ。また、時刻 $t = 0$ での位置 $x_0 = 5[m]$, 初速度 $v_0 = -5[m/s]$ の時、速度と位置を求めよ。

(2) $k = 7.5[N/m]$, $m = 0.5[kg]$, $b = 2.0[Ns/m]$ とする。さらにx軸方向に外力 $F(t) = 20\sin 3t$ が加わっている。運動方程式を作り、速度と位置を時間 $t$ の関数として求めよ。

(3) バネの一端を天井に固定し、上下方向に振動させる。上向きにy軸をとる。運動方程式を作り、速度、位置を時間 $t$ の関数として求めよ。(外力は働かないとする。)

と空気抵抗

**[2]**

(1) 力ベクトルが

$$\vec{f}(x,y) = 3x^2y^2\vec{e_x} + \{2x^3y + 2\cos(2y)\}\,\vec{e_y}$$

の時、$(1,4) \to (3,4) \to (3,5)$ の経路での仕事を求めよ。さらに $(1,4) \to (1,5) \to (3,5)$ の経路での仕事を求めよ。

(2) 力ベクトルが

$$\vec{f}(x,y) = \{\cos(2x) - 2xy^2\sin(x^2y)\}\,\vec{e_x} + \{\cos(x^2y) - x^2y\sin(x^2y)\}\,\vec{e_y}$$

の時、保存力の条件を満たすかどうか調べよ。また、保存力の場合には,基準点を $(a,b)$ として、そのポテンシャル $U(x,y)$ をもとめよ。

**[3]**

質量 $m$ の物体に力 $F(t) = Ae^{at} + B\sin(bt)$ が加わるとする。時刻 $t = 0$ の時、初速度 $v_0$、位置 $x_0$ とする。$(A, B, a, b, v_0, x_0$ : 定数$)$ このとき時刻 $t$ での速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。

[4] 極座標を使って物体の運動を考える。極座標における単位ベクトルは、直交座標の単位ベクトルを用いて

$$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$$

で与えられているとする。また位置ベクトルは $\vec{r} = r\vec{e_r}$ と書かれる。ここで $r,\ \theta$ は時間 $t$ の関数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{e_r},\ \vec{e_\theta}$ を図示せよ。また極座標における単位ベクトルの時間微分は

$$\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}, \quad \dot{\vec{e_\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r},$$

であることを示せ。

(2) 速度ベクトル、加速度ベクトルを極座標を用いて表せ。また極座標における運動エネルギーをもとめよ。

(3) 中心力とは何か。またこの力が働く時、角運動量が保存することを示せ。

(4) 万有引力を

$$\overrightarrow{F(r)} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e_r}$$

とする。($m, M, G$ は定数。) この力が保存力であることを示せ。また $(a, b) \to (x, y)$ の経路における仕事を考え、ポテンシャルを求めよ。

(5) (4) の力が働く場合の運動を考える。$h = r^2\dot{\theta}$ とおき、有効ポテンシャル $U_{eff}$ をもとめよ。

(6) (4) において $U_{eff}$ の増減表を作成し、極値を求め $U_{eff}$ を図示せよ。また楕円運動を行う時の力学的エネルギー $E$ の範囲を求め、その理由を $U_{eff}$ の図より説明せよ。

(7) (4) の力が働く場合の運動について極座標における運動方程式を導け。また $r$ を $\theta$ の関数としさらに $u = 1/r$ として $u$ の方程式に変形し、その解 $u(\theta)$ をもとめよ。これより

$$r(\theta) = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

を導出せよ。

(8) (7) を使って、離心率 $e$ と力学的エネルギー $E$ の関係を導出せよ。

に固定し、水平方向に振動させる。横向きに $x$ 軸をとり、バネの自然長での物体の位置を原点とする。また時刻 $t=0$ での初速度を $v_0$, 位置 $x_0$ とする。

(1) 物体の位置を $x(t)$ として運動方程式を作れ。

(2) この運動の解を求め、角速度 $\omega$ と周期 $T$ をもとめよ。

(3) この運動に速度 $v$ に比例する空気抵抗 $-bv$ $(b>0)$ が働く場合の運動方程式を作れ。また $k=30[N/m]$, $m=2[kg]$, $b=12[Ns/m]$, $x_0=3[m]$, $v_0=0[m/s]$ としてこの運動方程式を解き、$x(t)$, $v(t)$ を求めよ。

(4) (3) においてさらに外力 $F(t)=12\sin(3t)$ が加わるとき、運動方程式を作れ。また (3) の数値にて運動方程式を解き、$x(t)$, $v(t)$ を求めよ。

[3]

$$\vec{f}(x,y)=(2e^{2x}\cos 3y-2e^{3y}\cos 2x)\ \vec{e_x}+(-3e^{2x}\sin 3y-3e^{3y}\sin 2x)\ \vec{e_y}$$

は保存力かどうか調べよ。また、$(1,2)\to(4,2)\to(4,5)$ の経路での仕事を求めよ。さらに $(1,2)\to(1,5)\to(4,5)$ の経路での仕事を求めよ。

[4]

(1) 質量 $m$ の物体の座標は $x(t)=\sqrt{a\sin^2 2t+be^{3t}}$ とする。$(a,b:$ 定数$)$ このとき時刻 $t$ での速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$, この運動を行う為に必要な力 $F(t)$ を求めよ。

(2) 質量 $m$ の物体に力 $F(t)=Ae^{2t}+B\sin(3t)$ の物体がある。時刻 $t=0$ の時、初速度 $v_0$、位置 $x_0$ とする。$(A,B:$ 定数$)$ このとき時刻 $t$ での速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。