# 物理学IA 2007年

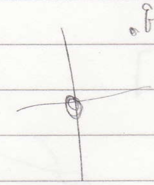
[1] $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ とおくと。

$\frac{dx}{dt} = v$

$\frac{d\mathbf{r}^2}{d\mathbf{r}} = 2\mathbf{r}$

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r})$$
$$= -\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)$$
$$= -\frac{1}{2}k(2r_x, 2r_y, 2r_z)$$
$$= -k(r_x, r_y, r_z)$$
$$= -k\mathbf{r} \ //$$

△ [2] $\mathbf{E} = k\frac{Q}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$ , $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$




$\frac{kQ}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \frac{kQ}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{e}_r$

$\mathbf{r}$は単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ を用いて、

$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$

と表せる。これより、 $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r\, dr$

$\mathbf{r}$の延長線上に $\mathbf{r}' = r'\mathbf{e}_r$ ととる。

よって、位置エネルギーの基準を無限遠点にとると

$$U(\mathbf{r}) = -\int_\infty^r \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$$
$$= +\int_\infty^r qk\frac{Q}{r'^3} \cdot r'\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r\, dr'$$
$$= +\int_\infty^r kQq\frac{r'\mathbf{e}_r^2}{r'^3}\, dr$$
$$= -kQq\int_r^\infty \frac{dr}{r'^2}$$
$$= -kQq\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$
$$= -k\frac{Qq}{r} \ //$$


基準点を無限遠点とすると、Fをrに運ぶ際の力は $F = -q\mathbf{E}$ となる。

$$U(\mathbf{r}) = -\int_\infty^r F\, d\mathbf{r}$$
$$= +\int_\infty^r k\frac{Qq}{r^2}\mathbf{e}_r\, d\mathbf{r}$$

$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ であり、$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r\, dr$ となるから、

$$U(\mathbf{r}) = \int_\infty^r k\frac{Qq}{r^2}|\mathbf{e}_r|^2\, dr$$
$$= \left[k\frac{Qq}{r}\right]_\infty^r \quad -\frac{1}{r^2}$$
$$= -k\frac{Qq}{r} \ //$$

$k\frac{Qq}{\mathbf{r}}$

[3] $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , $\mathbf{r} = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)$

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, 0)$

よって、原点周りの角運動量ベクトルは

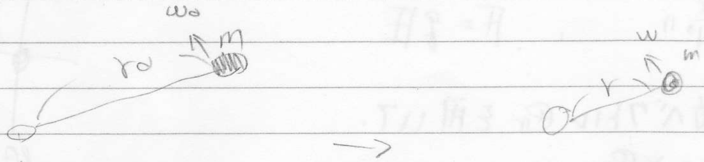
$$\mathbf{L} = m\overrightarrow{OR} \times \mathbf{v}$$
$$= m(R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0) \times \omega(-R\sin\omega t, R\cos\omega t, 0)$$

$$= m\omega \begin{vmatrix} i & j & k \\ R\cos\omega t & R\sin\omega t & 0 \\ -R\sin\omega t & R\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t \end{pmatrix}$$

$$= m\omega(0,0,R^2) = \underline{(0,0,m\omega R^2)}$$ //

[4]




糸にかかる力Fは、角速度をωとして

$F = mr\omega^2$ --- ①

初めの状態での角運動Lは

$L = mr \times v = mr_0 \times r_0\omega_0$

$= mr_0^2\omega_0$ --- ②

質点に働く力は中心力のみなので、角運動は保存する。

$r_0^2\omega_0 = r^2\omega$

$\omega = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}$

よって、②より、

$mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$ $\therefore$ $\omega = \frac{\omega_0 r_0^2}{r^2}$

これを①に代入して、

$F = m\cancel{r}\frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^{\cancel{4}}} = \underline{\frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3}}$ //