物理学 IA 中間試験

浦崎 2010. 6. 4. Fri. 1 限

注)途中式も採点の対象となるので、ある程度計算の過程が追えるように書くこと。
ただし、単振動の解や摩擦による減衰を表す解など、知っているものは導出を示さずに用いてよい。50 点満点。

[1] t を時間、 a, ω, v_0 を定数として、 xy 平面上の点が $\mathbf{r} = (a\omega t - a \sin \omega t, a(1 - \cos \omega t))$ と表されている。速度ベクトルの[大きさ]の最大値と最小値を求めよ。(10 点)

[2] xy 面内における質量 m の質点の放物運動について考える。 $t = 0$ における位置と速度をそれぞれ $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_0 = v_0 (\cos \theta, \sin \theta)$ と与え ($0 < \theta < \pi/2$)、重力を $\mathbf{F} = (0, -mg)$ としたとき、軌跡は $y = Ax^2 + Bx$ と得られる。 A, B を求め、さらに y の最大値を求めよ。(10 点)

[3] 単振動する質点が、速度に比例する抵抗によって減衰振動する様子を調べる。運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

である。 $t = 0$ で原点で速度 v_0 を持っていたとし、 $x(t)$ を求めよ。(10 点)

[4] 速度に比例する空気抵抗の、等速直線運動への影響を考える(他には力は働いていないとする)。このとき、運動方程式は速度を $\frac{dx}{dt} = v (> 0)$ とおけば $m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v$ と書き直せる。初期条件 $x(t=0) = 0, v(t=0) = v_0$ の下でこれを解き、指数関数に近似 $e^z \simeq 1 + z + \frac{1}{2}z^2$ を用いると、 $x \simeq v_0 t - \alpha t^2$ の形になる。空気抵抗の効果 α を与えられた定数 (γ, m, v_0 などの中から) で示せ。(10 点)

[5] バネ定数 k のバネに固定された質量 m の質点に、振動的な外力を加えたとする、運動方程式は、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x + f \cos \omega_f t \quad (2)$$

と表される。ただし $\omega = \sqrt{k/m}$ である。

(1) 特解を $x_f = A \cos \omega_f t$ とおいて求めよ。(代入し、方程式を満たすように A を決める。) (5 点)

(2) 特解と $f = 0$ の場合の一般解を足し合わせれば(2)の一般解となる。初期条件として $t = 0$ で質点は[原点]に[静止]していたとし、解 x を求めよ。(5 点)