2004

[1] $x(t)=\sqrt{at^3+b\log t}$ より、

(1) $$v(t)=\frac{3at^2+\frac{b}{t}}{2\sqrt{at^3+b\log t}}$$

$$a(t)=\frac{\left(6at-\frac{b}{t^2}\right)\sqrt{at^3+b\log t}-\left(3at^2+\frac{b}{t}\right)\frac{3at^2+\frac{b}{t}}{2\sqrt{at^3+b\log t}}}{2(at^3+b\log t)}$$

$$=\frac{2\left(6at-\frac{b}{t^2}\right)(at^3+b\log t)-\left(3at^2+\frac{b}{t}\right)^2}{4(at^3+b\log t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F(t)=ma(t)=m\cdot\frac{2\left(6at-\frac{b}{t^2}\right)(at^3+b\log t)-\left(3at^2+\frac{b}{t}\right)^2}{4(at^3+b\log t)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) $$a(t)=\frac{1}{m}\left(Ae^{at}+B\sin(bt)\right)$$

より

$$v(t)=\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a}e^{at}-\frac{B}{b}\cos(bt)\right)+C$$

$$x(t)=\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a^2}e^{at}-\frac{B}{b^2}\sin(bt)\right)+Ct+C'$$

$t=0$のとき、$v_0$、$x_0$から

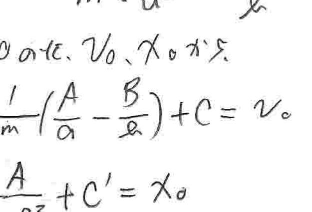
$$\begin{cases}\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a}-\frac{B}{b}\right)+C=v_0\\ \frac{A}{ma^2}+C'=x_0\end{cases}$$

より $$\begin{cases}C=v_0-\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a}-\frac{B}{b}\right)\\ C'=x_0-\frac{A}{ma^2}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}v(t)=\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a}(e^{at}-1)-\frac{B}{b}(\cos(bt)-1)\right)+v_0\\ x(t)=\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a^2}(e^{at}-1)-\frac{B}{b^2}\sin(bt)\right)+\left(v_0-\frac{1}{m}\left(\frac{A}{m}-\frac{B}{b}\right)\right)t+x_0\end{cases}$$

[2]

(1)




$$\begin{cases}\dot{e}_r=-\dot\theta\sin\theta\, e_x+\dot\theta\cos\theta\, e_y\\ \quad=\dot\theta\, e_\theta\\ \dot{e}_\theta=-\dot\theta\cos\theta\, e_x-\dot\theta\cos\theta\, e_y\\ \quad=-\dot\theta\, e_r\end{cases}$$ (Q.E.D.)

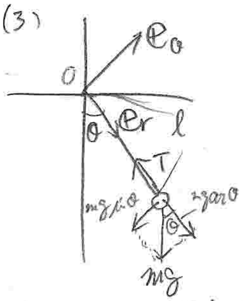
(2) $$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot r e_r+r\dot e_r=\dot r e_r+r\dot\theta e_\theta$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot r e_r+\dot r\dot e_r+\dot r\dot\theta e_\theta+r\ddot\theta e_\theta+r\dot\theta\dot e_\theta$$

$$=\ddot r e_r+2\dot r\dot\theta e_\theta+r\ddot\theta e_\theta-r\dot\theta^2 e_r$$

$$=(\ddot r-r\dot\theta^2)e_r+\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)e_\theta$$

(3)




$$F_r=mg\cos\theta-T$$
$$F_\theta=-mg\sin\theta$$

動径方向の運動方程式は、

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=mg\cos\theta-T+mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$r=l$で一定より、

$$T=mg\cos\theta+ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad —— *$$

$\theta$方向の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=-mgr\sin\theta$$

$r=l$から $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ —**

両辺$\frac{d\theta}{dt}$かけて、

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}=-\frac{g}{l}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{g}{l}\frac{d}{dt}\cos\theta$$

$t=0$で、$\theta=\theta_0$ $\frac{d\theta}{dt}=0$として、$t$について積分すると、

$$\int_0^t\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}dt=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]_0^t=\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{g}{l}\int_0^t\frac{d}{dt}(\cos\theta)dt=\frac{g}{l}[\cos\theta]_0^t=\frac{g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$\therefore\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

*に代入して、

$$T=mg\cos\theta+2mg(\cos\theta-\cos\theta_0)$$
$$=3mg\cos\theta-2mg\cos\theta_0$$

$\theta$が小さいとき、$\sin\theta\approx\theta$から、**は、

$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta$ これは $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ と同じ

$\therefore\theta=\theta_0\cos\omega t$, $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ 周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(4)

$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta = -\cos\theta\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x^2+\sin\theta\cos\theta\,\boldsymbol{e}_y^2$ (∵ $\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=0$)

$=0$

∴ $\boldsymbol{e}_r$と$\boldsymbol{e}_\theta$は直交する。

$|\boldsymbol{e}_r| = \sqrt{(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x)^2+(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y)^2}=1$ (∵ $|\boldsymbol{e}_x|=|\boldsymbol{e}_y|=1$)

$|\boldsymbol{e}_\theta| = \sqrt{(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x)^2+(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_y)^2}=1$ (Q.E.D.)

運動エネルギー

$\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m((\dot{r}\boldsymbol{e}_r)^2+(r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)^2)$

$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)$

(5)

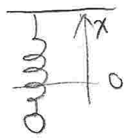
$U(r) = -\int_\infty^r -G\frac{Mm}{r^2}dr = -\left[G\frac{Mm}{r}\right]_\infty^r = -G\frac{Mm}{r}$

$E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\dot{\theta}h)-G\frac{Mm}{r}$

有効ポテンシャルって何？食えるの？

(6) (5)より、ムリ　(教科書p.69〜71に類題あるので見)

[3] (1) 運動方程式は、




$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-kx(t)-mg$

(2) (1)より、

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{k}{m}\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)$

$x(t)+\frac{mg}{k}=C_0e^{\sqrt{-\frac{k}{m}}t}$

$t=0$で$x_0$より $C_0=x_0+\frac{mg}{k}$

∴ $x(t)=\left(x_0+\frac{mg}{k}\right)e^{\sqrt{-\frac{k}{m}}t}-\frac{mg}{k}$

これより、

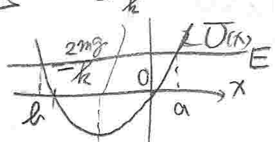
$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$、$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(3) $U(x)=-\int_0^x(-kx(t)-mg)dx$

$=\frac{1}{2}kx(t)^2+mgx$

$U(x)=0$とすると、$x=0,\ -\frac{2mg}{k}$

より、右図のようになる。




運動範囲 $b\le x\le a$

$t=0$のとき、$x=-\frac{mg}{k}$、$v>0$とすると、

$x=a$のとき$v=0$、$F<0$で折り返す。

$-\frac{mg}{k}<x<a$のとき $v<0$、$|v|$増加

$x=-\frac{mg}{k}$のとき $v$: max

$b<x<-\frac{mg}{k}$のとき、$v<0$、$|v|$減少

$x=b$のとき、$v=0$、$F>0$で折り返す。

$b<x<0$のとき、$v>0$、$|v|$増加

以下 $b\le x\le a$で往復運動。

(4) 運動方程式

$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-kx(t)-mg-b\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|$

一般解は、$x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t$

より上式は

$m(-v_0\omega\sin\omega t-x_0\omega^2\cos\omega t)$

$=-k\left(\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t\right)-mg$

$-b\left|v_0\cos\omega t-x_0\omega\sin\omega t\right|$

となり ―――――― つんだ。

[4] (1) どの点においても、力が一つの中心へ向かって引くように働き、あるいは、一つの中心から退けるように働き、その大きさは中心からの距離にのみ依存するとき、この力を中心力という。

中心力: $\boldsymbol{F}=F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=K(r)\boldsymbol{r}$

力のモーメントの定義より

$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}]=[\boldsymbol{r}\times K\boldsymbol{r}]=0$

i.e. $\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]=0$

∴ $\boldsymbol{l}=[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$: 一定

ゆえに、角運動量は保存される。(Q.E.D.)

(2) (遠心力) $= F$

(角速度) $= \sqrt{\dfrac{F \cdot r}{m}}$

(角運動量) $= m r \sqrt{\dfrac{F \cdot r}{m}} = r\sqrt{F \cdot r m}$

[5]

$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 6x^2 y$, $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 6x^2 y$ より, 保存力である.

$$W = \int_0^2 3x^2 y^2 \Big|_{y=0} dx + \int_0^3 (2x^3 y + 2y)\Big|_{x=0} dy$$

$$= \left[x^3 y^2\right]_0^2 \Big|_{y=0} + \left[(x^3+1)y^2\right]_0^3 \Big|_{x=0}$$

$$= 9$$

$$dU = -\left(3x^2 y^2 dx + (2x^3 y + 2y) dy\right)$$

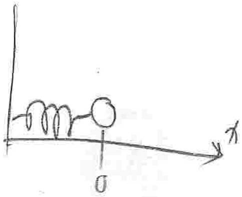
$$= -d\left(x^3 y^2 + (x^3+1) y^2\right)$$

$$\therefore U = -(2x^3+1)y^2$$

2007

[1]

(1)




$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ より $0.4\ddot{x} = -0.8x - 2.4\dot{x}$

∴ $\ddot{x} + 6\dot{x} + 2x = 0$

($\lambda^2 + 6\lambda + 2 = 0$ より $\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-8}}{2} = -3 \pm \sqrt{7}$)

∴ 一般解は $x = C_1 e^{(-3+\sqrt{7})t} + C_2 e^{(-3-\sqrt{7})t}$

$\dot{x} = (-3+\sqrt{7})C_1 e^{(-3+\sqrt{7})t} + (-3-\sqrt{7})C_2 e^{(-3-\sqrt{7})t}$

$t=0$ で $x_0 = 5$、$v_0 = -5$ のとき、

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ (-3+\sqrt{7})C_1 + (-3-\sqrt{7})C_2 = -5 \end{cases}$$

より $C_1 = \frac{-10+5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$ $C_2 = \frac{10+5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$

から、$x = \frac{-10+5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} e^{(-3+\sqrt{7})t} + \frac{10+5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} e^{(-3-\sqrt{7})t}$

$\dot{x} = \frac{55-25\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} e^{(-3+\sqrt{7})t} - \frac{55+25\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} e^{(-3-\sqrt{7})t}$

(2) $0.5\ddot{x} = -7.5x - 2.0\dot{x} + 20\sin 3t$ (イカツイな…)

∴ $\ddot{x} + 4\dot{x} + 15x = 20\sin 3t$ —*

$\gamma = 2$、$\omega = \sqrt{15}$、$\omega_0 = \sqrt{15-4} = \sqrt{11}$、$\omega_f = 3$、$f = 20$

斉次線形方程式の解は、

$x = Ae^{-2t}\sin(\sqrt{11}t + \delta)$

また、$x = Be^{3it}$ とおいて*に代入すると、

$-9B\cancel{e^{3it}} + 12iB\cancel{e^{3it}} + 15B\cancel{e^{3it}} = 20\cancel{e^{3it}}$

∴ $B = \frac{20}{6+12i} = \frac{10}{3+6i}$

$x = Re\left[\frac{10}{3+6i}e^{3it}\right] = Re\left[\frac{\overset{2}{\cancel{10}}(\cos 3t + i\sin 3t)(3-6i)}{\underset{9}{\cancel{45}}}\right]$

$= \frac{2}{9}(3\cos 3t + 6\sin 3t) = \frac{2}{3}(\cos 3t + 2\sin 3t)$

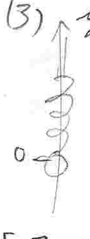
$= \frac{2\sqrt{5}}{3}\cos(3t - \alpha)$ ($\alpha = \tan^{-1} 2$)

∴求める一般解は

$x = Ae^{-2t}\sin(\sqrt{11}t + \delta) + \frac{2\sqrt{5}}{3}\cos(3t - \alpha)$ カオス

$\dot{x} =$

(3)




$m\ddot{y} = ky$

$y = Ae^{\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ 初期条件とかほしいなと。

$\dot{y} = A\sqrt{\frac{k}{m}}t$

[2]

(1)

$W_1 = \int_1^3 3x^2y^2\Big|_{y=4} dx + \int_4^5 (2x^3y + 2\cos(2y))\Big|_{x=3} dy$

$= (3^3 - 1^3)4^2 + 3^3(5^2 - 4^2) + (\sin 10 - \sin 8)$

$= 659 + \sin 10 - \sin 8$

$W_2 = \int_4^5 (2x^3y + 2\cos(2y))\Big|_{x=1} dy + \int_1^3 3x^2y^2\Big|_{y=5} dx$

$= 5^2 - 4^2 + \sin 10 - \sin 8 + 5^2(3^3 - 1)$

$= 659 + \sin 10 - \sin 8$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -4xy\sin(x^2y) - 2x^3y^2\cos(x^2y)$

$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -2xy\sin(x^2y) - 2xy\sin(x^2y) - 2x^3y^2\cos(x^2y)$

$= -4xy\sin(x^2y) - 2x^3y^2\cos(x^2y)$

よって保存力である。

$U_{(x,y)} = -\int_a^x \{\cos(2x) - 2xy^2\sin(x^2y)\}\Big|_{y=b} dx - \int_b^y \{\cos(x^2y) - x^2y\sin(x^2y)\}\Big|_{x=a} dy$

$= -\frac{1}{2}(\sin(2x) - \sin(2a)) - b(\cos(bx^2) - \cos(a^2b))$

$\cancel{-\frac{1}{a^2}(\sin(a^2y) - \sin(a^2b))}$

$+\frac{1}{a^2}(-a^2y\cos(a^2y) + a^2b\cos(a^2b) + \cancel{\sin a^2y - \sin a^2b})$

$= -b\cos(bx^2) - \frac{1}{2}\sin(2x) - y\cos(a^2y) + \frac{\sin(2a)}{2} + 2b\cos(a^2b)$

[3] 運動方程式は、

$m\ddot{x}(t) = Ae^{at} + B\sin(bt)$ より、両辺積分して、

$$m\dot{x}(t) = \frac{A}{a}e^{at} - \frac{B}{b}\cos(bt) + C_1$$

$$mx(t) = \frac{A}{a^2}e^{at} - \frac{B}{b^2}\sin(bt) + C_1 t + C_2$$

$t=0$ のとき $v_0$、$x_0$ から、

$$\begin{cases} mv_0 = \dfrac{A}{a} - \dfrac{B}{b} + C_1 \\ mx_0 = \dfrac{A}{a^2} + C_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} C_1 = mv_0 - \dfrac{A}{a} + \dfrac{B}{b} \\ C_2 = mx_0 - \dfrac{A}{a^2} \end{cases}$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a^2}e^{at} - \frac{B}{b^2}\sin(bt) + \left(mv_0 - \frac{A}{a} + \frac{B}{b}\right)t + mx_0 - \frac{A}{a^2}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a}e^{at} - \frac{B}{b}\cos(bt) + mv_0 - \frac{A}{a} + \frac{B}{b}\right)$$

[4] (1)〜(6)、2004類題より略.

(7) $F_r = -\frac{GMm}{r^2}$、$F_\theta = 0$ から、運動方程式は、

$$\begin{cases} \text{動径方向}: m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{GMm}{r^2} + mr\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{—— } * \\ \theta\text{方向}: \dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0 \quad (\text{角運動量保存}) \end{cases}$$

$\therefore mr^2\frac{d\theta}{dt} = L =$ 一定

より、$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ ＊に代入して、両辺 $m$ で割ると、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L^2}{m^2r^3} \quad \text{—— } **$$

さて、$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$

より＊＊は、

$$\frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L^2}{m^2r^3}$$

ここで $u = \frac{1}{r}$ とおくと、

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

から、$\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{du}{d\theta}\right) = -GMu^2 + \frac{L^2}{m^2}u^3$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{GMm^2}{L^2}$$

この一般解は、

$$u = A\cos(\theta+\delta) + \frac{GMm^2}{L^2}$$

$\therefore r = r(\theta)$ の一般解は、

$$r = \frac{1}{\dfrac{GMm^2}{L^2} + A\cos(\theta+\delta)} = \frac{\dfrac{L^2}{GMm^2}}{1 + \left(\dfrac{AL^2}{GMm^2}\right)\cos(\theta+\delta)}$$

$\theta = 0$ で $r$ 最小となるようにすると、$\delta = 0$ で $A \geq 0$ となる

ここで、$l = \frac{L^2}{GMm^2}$、$e = \frac{AL^2}{GMm^2} \geq 0$

とおくと、$r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$

(8) (教科書p.71〜6参照)

長半径 $a = -\frac{GMm}{2E} = \frac{l}{1-e^2} = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1-e^2}$

$$\therefore e^2 - 1 = \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}$$

$e \geq 0$ から、$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$

これより、

$$\begin{cases} E = E_0 = -\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2} \text{ のとき } e = 0 \ (\text{円}) \\ E_0 < E < E \text{ のとき } 0 < e < 1 \ (\text{楕円}) \\ E = 0 \text{ のとき } e = 1 \ (\text{放物線}) \\ E > 0 \text{ のとき } e > 1 \ (\text{双曲線}) \end{cases}$$

[おまけ問題は類題ばかりなので略.]