デジタル信号処理 期末試験問題

以下の4問に解答せよ。導出問題は過程がわかるように解答すること。

- ※ A4の紙1枚を持ち込み可とする。最後に答案と一緒に（答案にはさんで）提出する。
- ※ 周波数は、正規化周波数 $f[\text{Hz}]$ を用いるものとするが、角周波数 $\omega[\text{rad/sec}]$ を用いても良い。
- ※ 特に指定がない場合は、離散時間信号の標準化間隔（サンプル間隔）は T とする。
- ※ 本日午後に、授業支援システムに解答例を掲載する予定。

1. ある連続時間信号 $x(t)$ と、そのサンプル値列 $x_k = x(kT)$ について、以下の問いに答えよ。

((a)(c)(d)5点, (b)10点)

- (a) 信号 $x(t)$ のフーリエ変換を $X(f)$ とする。 $x(t)$ を用いて $X(f)$ を表せ。
 (b) (a)の結果に2つの近似を導入して、サンプル値列 x_k のフーリエ変換式を導出したところ

$$X(f) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j2\pi kTf} \quad \dots (1)$$

を得た。どのような近似を用いて式(1)を得たか説明せよ。必要があれば図を用いても良い。

- (c) 式(1)において、 $X(f) = X\left(f + \frac{N}{T}\right)$ が成り立つことを示せ。ただし N は整数とする。
 (d) 式(1)は、実際には右辺の T を省略して使用することが多い。その理由を示せ。

2. 離散フーリエ変換(DFT)および高速フーリエ変換(FFT)について、以下の問いに答えよ。

((a)(c)10点, (b)5点)

- (a) 8点のDFT行列 D_8 を示せ。ただし、行列の各要素は

$$\pm 1, \pm j, \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}}, \frac{-1 \pm j}{\sqrt{2}}$$

のいずれかの値をとるものとする。

- (b) $x_k = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 7$) とする。この数列を「ビット逆順」に並べた数列 $\{y_k\}_{k=0}^7$ を示せ。
 (c) 行列 D_8 の各列 (0列~7列) を、数列 y_k の順に並べ替えることで得られる行列 $\tilde{D}_8$ を示せ。

さらに $\tilde{D}_8 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}$ と 2×2 小行列に分解する。各小行列間の関係を示せ。

3. FIR フィルタについて、以下の問いに答えよ。(a)(b)(d)5点, (c)10点)

(a) FIR フィルタの設計において、窓関数法による設計と Remez 法による設計の違いを簡潔に述べよ。必要があれば図を用いても良い。

(b) 一般に、ハイパスフィルタの伝達関数の係数の総和は 0 になる。その理由を述べよ。

(c) インパルス応答が $\left[\underset{\uparrow}{-\frac{1}{8}}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \right] = \frac{1}{8} \left[\underset{\uparrow}{-1}, -2, 6, -2, -1 \right]$ で与えられる FIR フィルタの

振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ を求め、 $0 \leq f \leq \frac{1}{2T}$ の範囲で概形を図示せよ。特に、 $f = 0, \frac{1}{4T}, \frac{1}{2T}$ においては具体的な振幅値を記入せよ。

(d) (c)のフィルタに 4 点周期の入力信号 $\underset{\uparrow}{[2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, \dots]}$ を与えたときの出力信号を求めよ。

また、(c)の図より、得られた結果が妥当であることを考察せよ。

4. 2つの IIR フィルタ ①: $H_1(z) = \frac{2(1+z^{-1})}{5-z^{-1}}$, ②: $H_2(z) = \frac{6(1+z^{-1})}{7+5z^{-1}}$ について、以下の問いに答えよ。(a)(b)(c)5点, (d)10点)

(a) これら 2つのフィルタはともに安定であることを示せ。

(b) フィルタ①の入力信号 x_k と出力信号 y_k との関係を漸化式で示せ。

(c) フィルタ①に $[1, 1, 1, 1, \dots]$ という入力信号を与えた場合の出力信号を求めよ。

(d) 2つのフィルタの振幅特性 $A_1(e^{j2\pi fT}), A_2(e^{j2\pi fT})$ を求め、両者の違いがわかるように、

$0 \leq f \leq \frac{1}{2T}$ の範囲で 2つの振幅特性の概形を図示せよ。特に、 $f = 0, \frac{1}{4T}, \frac{1}{2T}$ においては具体的な振幅値を記入せよ。