

ディジタル信号処理 期末試験問題

以下の 4 問に解答せよ。 3 (a)～(c), 4 (b)～(e)は導出過程がわかるように解答すること。

- ※ A4 の紙 1 枚を持ち込み可とする。最後に答案と一緒に（答案にはさんで）提出する。
- ※ 周波数は、正規化周波数 $f[\text{Hz}]$ を用いるものとするが、角周波数 $\omega[\text{rad/sec}]$ を用いても良い。
- ※ 特に指定がない場合は、離散時間信号の標準化間隔（サンプル間隔）は T とする。
- ※ 7/29(月)に、授業支援システムに解答例を掲載する予定。

1. 2 つの N 次ベクトル $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$, $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]^T$ が, N 次 DFT 行列 $\mathbf{D}$ によって $\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ と結び付けられている。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし, $[]^T$ は転置を表すものとする。

(a) N 点 DFT の定義式を示せ (X_n を $x_0 \sim x_{N-1}$ で表せ。ただし $n = 0, 1, \dots, N-1$ とする)。

(b) 以下の□にそれぞれ適当な値を入れて, 行列 $\mathbf{D}$ を完成させよ。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \end{bmatrix}$$

(c) (a)の定義式において, $X_{n+mN} = X_n$ が成り立つことを示せ。ただし m は任意の整数, また $n = 0, 1, \dots, N-1$ とする。

(d) $\mathbf{x}$ の要素が全て実数のとき, $X_n = X_{N-n}^*$ が成り立つことを示せ。ただし $n = 0, 1, \dots, N-1$ とする。

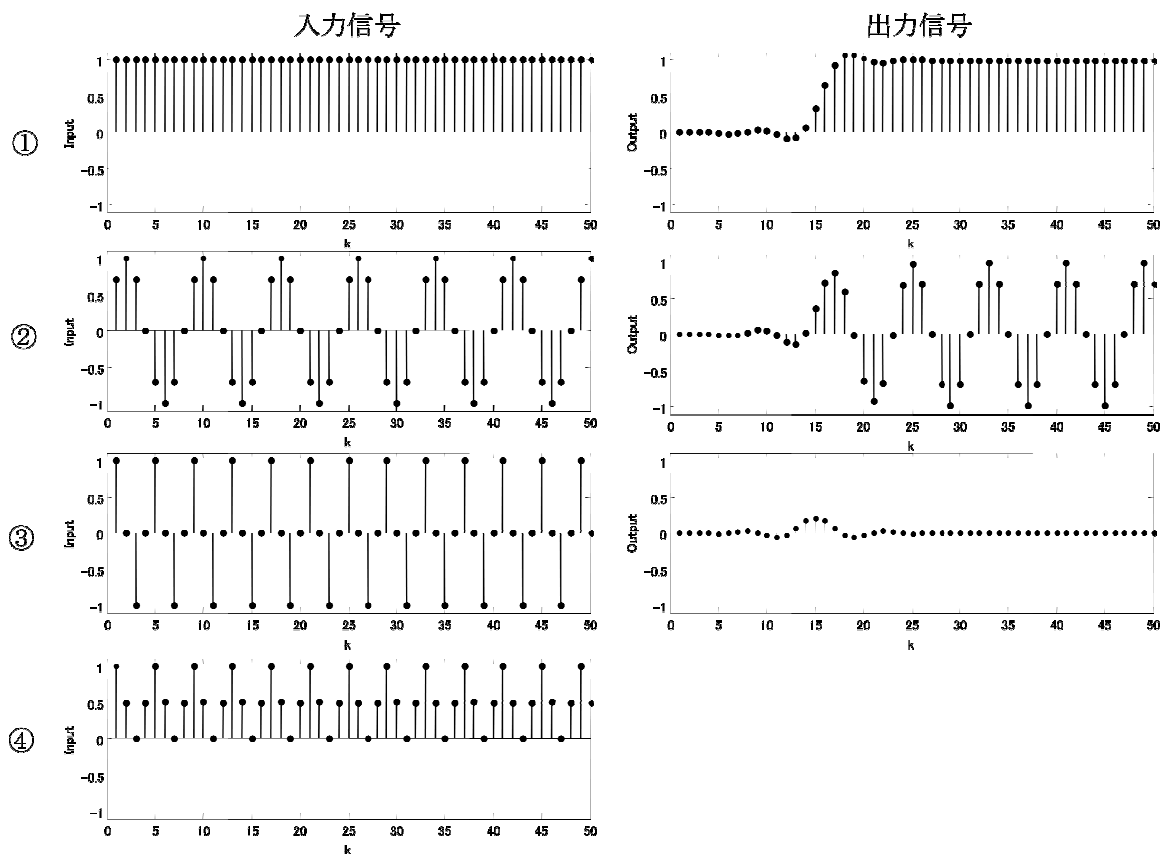
2. 高速フーリエ変換(FFT)について, 以下の問いに答えよ。

(a) 4 点の離散信号 $[1, 3, 0, 1]$ の DFT を計算せよ。

(b) 4 点の離散信号 $[1, 3, 0, 1]$ の FFT を計算し, (a)と同じ解が得られることを確認せよ。

(c) FFT を利用できるのは, サンプル点数が 2 のべき乗 ($N = 2^n$) 個の場合に限られる。その理由を説明せよ。

(d) N 点の離散信号 ($2^{n-1} < N < 2^n$) の周波数スペクトルを計算する場合, そのまま N 点 DFT で処理するのと, 値 0 の離散点を付加して合計 2^n 点として FFT 処理するのとでは, どちらがより効率的か。簡潔に説明せよ。



3. 上図は、ある直線位相 FIR ローパスフィルタの入出力信号の関係を示している。横軸 k は離散時間を表し、間隔は T とする。以下の問いに答えよ。

- このフィルタの伝達関数の係数の総和は 1 になる。その理由を述べよ。
- このフィルタの次数はおよそ何次か。また、そのように考える理由を述べよ。
- このフィルタの振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ はどのような形になるか。 $0 \leq f \leq 1/2T$ の範囲で概形を図示し、②,③に対応する周波数においては補助線をひいて具体的な値を明示せよ。
- ④の入力信号に対する出力信号はどのような形になるか、 $k = 0, 1, \dots, 30$ の範囲で図示せよ。

4. 伝達関数が $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}$ で与えられる IIR フィルタについて、以下の問いに答えよ。

- このフィルタは安定であることを示せ。
- このフィルタの入力信号 x_k と出力信号 y_k との関係を漸化式で示せ。

(c) このフィルタの振幅特性は $A(e^{j2\pi fT}) = \sqrt{\frac{1+a_1 \cos 2\pi fT}{b_0 + b_1 \cos 2\pi fT}}$ と書くことができる。係数

a_1, b_0, b_1 を求めよ。また、周波数 $f = 0$ および $f = 1/2T$ における振幅値を確認せよ。

- このフィルタに $[1, 1, 1, \dots]$ という入力信号を与えた場合の出力信号を求めよ。
- このフィルタに $[1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots]$ という入力信号を与えた場合の出力信号を求めよ。