

ディジタル信号処理 期末試験問題

以下の 4 問に解答せよ。 3 (a)~(c), 4 (b)~(e)は導出過程がわかるように解答すること。

※ A4 の紙 1 枚を持ち込み可とする。最後に答案と一緒に (答案にはさんで) 提出する。

※ 周波数は, 正規化周波数 $f[\text{Hz}]$ を用いるものとするが, 角周波数 $\omega[\text{rad/sec}]$ を用いても良い。

※ 特に指定がない場合は, 離散時間信号の標準化間隔 (サンプル間隔) は T とする。

1. 2 つのベクトル $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T$, $\mathbf{X} = [X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7]^T$ が, 8 次 DFT 行列 $\mathbf{D}_8$ によって $\mathbf{X} = \mathbf{D}_8 \mathbf{x}$ と結び付けられている。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし, $[\]^T$ は転置を表すものとする。

(a) 8 点 DFT の定義式を示せ (X_n を $x_0 \sim x_7$ で表せ。ただし $n = 0, 1, \dots, 7$ とする)。

(b) 行列 $\mathbf{D}_8$ は以下のように書いて, 要素 $a \sim h$ には $1, -1, j, -j, W, W^3, W^{-1}, W^{-3}$ のいずれかが入る。ただし, $W = e^{j\frac{\pi}{4}}$ である。 $a \sim h$ にはそれぞれ何が入るのか示せ。

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a & a & a \\ a & b & c & d & e & f & g & h \\ a & c & e & g & a & c & e & g \\ a & d & g & b & e & h & c & f \\ a & e & a & e & a & e & a & e \\ a & f & c & h & e & b & g & d \\ a & g & e & c & a & g & e & c \\ a & h & g & f & e & d & c & b \end{bmatrix}$$

(c) $\tilde{\mathbf{x}} = [x_0, x_2, x_4, x_6, x_1, x_3, x_5, x_7]^T$ とおくと, ベクトル $\mathbf{X}$ は 4 次 DFT 行列 $\mathbf{D}_4$ を用いて

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_4 & \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{D}_4 & -\mathbf{E}_4 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

と書ける。4 次正方行列 $\mathbf{E}_4$ を求めよ。

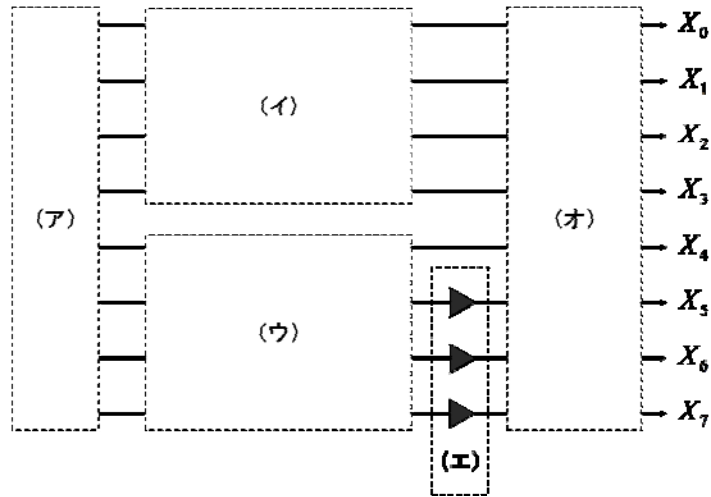
2. 次項に示す 8 点高速フーリエ変換(FFT)のシグナルフロー図について, 以下の問いに答えよ。

(a) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ を並べ替えて, 空欄(ア)に並ぶ入力信号を上から順に示せ。

(b) 加算器 8 個, 乗算器 5 個を用いて, 空欄(イ)(ウ)に共通する 4 点 FFT のシグナルフロー図を示せ。なお, 乗算を含むフローを赤(or 青)矢印などで示しても構わないが, その旨を明記するとともに, 各乗算器の係数 (乗数) がわかるように図示すること。

(c) 欄(エ)の 3 個の乗算器の係数は, 上が $W^{-1} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ となる。残り 2 個の乗算器の係数を示せ。

(d) 加算器 8 個, 乗算器 4 個を用いて, 空欄(オ)に適切なシグナルフロー図を示せ。なお, 4 個の乗算器の係数 (いずれも同じ値) がわかるように図示すること。



3. ハイパス特性を持つ FIR フィルタの伝達関数が $H(z) = \frac{1}{8}(-1 - 2z^{-1} + 6z^{-2} - 2z^{-3} - z^{-4})$ で与えられている. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (a) このフィルタに離散値列 $[1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$ を入力した場合の出力を求めよ.
- (b) このフィルタに 4 点周期の離散値列 $[1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots]$ を入力した場合の出力を求めよ.
- (c) このフィルタの振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ を求め, $f = 1/2T$ のときに振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ が 1 になることを確認せよ. また, $0 \leq f \leq 1/2T$ の範囲で振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ の概形を図示せよ.
- (d) 一般に, 伝達関数の係数の総和が 0 となる場合, ローパス特性は実現不可能である. その理由を簡潔に説明せよ.

4. 伝達関数が $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}}$ で与えられる IIR フィルタについて, 以下の問いに答えよ.

- (a) このフィルタは不安定であることを示せ.
- (b) このフィルタの入力信号 x_k と出力信号 y_k との関係を漸化式で示せ.
- (c) このフィルタのインパルス応答を求めることで, フィルタが不安定であることを確認せよ ($[h_0, h_1, h_2, h_3, \dots, h_k, \dots]$ といった形で, 最初の 4 項と一般項を示せ).

(d) このフィルタの振幅特性は $A(e^{j2\pi fT}) = \sqrt{\frac{2 + a_1 \cos 2\pi fT}{b_0 + b_1 \cos 2\pi fT}}$ と書くことができる. 係数

a_1, b_0, b_1 を求めよ. また, $f = 0$ のときに振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ が 2 になること, $f = 1/2T$ のときに振幅特性 $A(e^{j2\pi fT})$ が 0 になることを確認せよ.

(e) このフィルタと同じ振幅特性を持ち, かつ安定な IIR フィルタの伝達関数 $\tilde{H}(z)$ を示せ.