

1.

$$(a) X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

(b) 連続時間信号 $x(t)$ を, 階段状関数 $\tilde{x}(t) = x_k (kT \leq t < (k+1)T)$ で近似することと,

積分 $\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-j2\pi ft} dt$ を, 長方形の面積 $T \cdot e^{-j2\pi f kT}$ で近似することの 2 つの近似による.

式変形の詳細は, 第 3 回講義ノートの式(3.3)-(3.5)を参照.

$$(c) X\left(f + \frac{N}{T}\right) = T \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \left(f + \frac{N}{T}\right) kT} = T \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi f kT} e^{-j2\pi Nk} = T \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi f kT} = X(f)$$

$$(\because e^{-j2\pi Nk} = 1)$$

(d) フーリエ変換は, 周波数スペクトルの形状 (どの周波数情報がどの程度含まれているか) を見るために用いられる. 右辺冒頭の T は単なるスケーリング因子であり, 波形全体の形状には影響しない. また, T 倍しないことで演算量の低減にもなる. (といった趣旨の説明が書かれていれば得点を与える)

2.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(b) 導出過程は省略. 答は $\{0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7\}$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -j & j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & \frac{1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -j & -j & j & j \\ 1 & -1 & j & -j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -j & j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & -1 & -1 & j & j & -j & -j \\ 1 & -1 & j & -j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & \frac{1-j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

小行列間の関係は以下の通り.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} &= \mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{41}, \\ \mathbf{D}_{12} &= -\mathbf{D}_{22} = \mathbf{D}_{32} = -\mathbf{D}_{42}, \\ \mathbf{D}_{13} &= j\mathbf{D}_{23} = -\mathbf{D}_{33} = -j\mathbf{D}_{43}, \\ \mathbf{D}_{14} &= -j\mathbf{D}_{24} = -\mathbf{D}_{34} = j\mathbf{D}_{44} \end{aligned}$$

3.

(a) 窓関数法では, 理想インパルス応答を有限で打ち切って, 両端を小さく抑えることで理想特性に近いインパルス応答を得る. ただしカットオフ周波数付近で大きなリップルを生じたり, カットオフ特性が緩慢になる問題がある. Remez 法は Minimax 近似規範に基づいた最適化を行うため, 等リップル特性を持つフィルタが設計される. 反復最適化が必要なため, 窓関数法よりは演算が複雑である. (といった趣旨の説明が書かれていれば得点を与える)

(b) 伝達関数の係数の総和は, 直流入力に対する出力に等しい. ハイパスフィルタの場合は直流入力は通さないことから, その総和は0 (もしくは非常に小さな値) となる.

(c) 伝達関数は $H(z) = \frac{1}{8}(-1 - 2z^{-1} + 6z^{-2} - 2z^{-3} - z^{-4})$, 周波数特性は

$$\begin{aligned} H(e^{j2\pi fT}) &= \frac{1}{8}(-1 - 2e^{-j2\pi fT} + 6e^{-j4\pi fT} - 2e^{-j6\pi fT} - e^{-j8\pi fT}) \\ &= e^{-j4\pi fT} \cdot \frac{1}{8}(-e^{j4\pi fT} - 2e^{j2\pi fT} + 6 - 2e^{-j2\pi fT} - e^{-j4\pi fT}) \\ &= e^{-j4\pi fT} \cdot \frac{1}{8}(6 - 4\cos 2\pi fT - 2\cos 4\pi fT) \end{aligned}$$

となることから, 振幅特性は $A(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{8}(6 - 4\cos 2\pi fT - 2\cos 4\pi fT)$ となる.

$f = 0$ では 0, $f = \frac{1}{4T}, \frac{1}{2T}$ では 1 となるようなハイパス特性となる. 図は省略.

(d) 導出過程は省略．出力信号は $\left[\underset{\uparrow}{-\frac{1}{4}}, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{8}, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \right]$ となる．

入力信号は $\underset{\uparrow}{[2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, \dots]} = \underset{\uparrow}{[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]} + \underset{\uparrow}{[1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots]}$ と書けるように，

直流信号と周波数 $f = \frac{1}{4T}$ のコサイン波の和になっている．

(c)の結果から，直流入力除去され， $f = \frac{1}{4T}$ の成分のみが出力されており，妥当である．

4．

(a) ①のフィルタの極は， $5 - z^{-1} = 0$ より $z = 1/5$ ．

②のフィルタの極は， $7 + 5z^{-1} = 0$ より $z = -5/7$ ．

いずれも極が単位円の中にあるので安定．

(b) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(1+z^{-1})}{5-z^{-1}}$ より， $y_k = \frac{y_{k-1} + 2x_k + 2x_{k-1}}{5}$

(c) 計算は省略．出力信号は $\left[\frac{2}{5}, \frac{22}{25}, \frac{122}{125}, \dots, 1 - \frac{3}{5^{k+1}}, \dots \right]$ となる．計算は省略．

(d) 計算は省略．振幅特性は $A_1(e^{j2\pi fT}) = 2\sqrt{\frac{1+\cos 2\pi fT}{13-5\cos 2\pi fT}}$ ， $A_2(e^{j2\pi fT}) = 6\sqrt{\frac{1+\cos 2\pi fT}{37+35\cos 2\pi fT}}$

$f = 0$ ではともに 0， $f = \frac{1}{2T}$ ではともに 1，

$f = \frac{1}{4T}$ では $A_1 = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0.555$ ， $A_2 = \frac{6}{\sqrt{37}} \approx 0.986$ となる．

いずれもローパスフィルタとなるが， $f = \frac{1}{4T}$ での振幅値の比較から，フィルタ①の方がカットオフ周波数が低く通過域が狭い特性，フィルタ②ではカットオフ周波数が高く通過域が広い特性，という違いがある．図は省略．