ディジタル信号処理 期末試験（2013/07/26） 略解

１．(a)(c)(d)各 5 点，(b) 10 点，計 25 点

(a) $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$

(b) $$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi\frac{1}{N}} & e^{-j2\pi\frac{2}{N}} & \cdots & e^{-j2\pi\frac{N-1}{N}} \\ 1 & e^{-j2\pi\frac{2}{N}} & e^{-j2\pi\frac{4}{N}} & \cdots & e^{-j2\pi\frac{2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi\frac{N-1}{N}} & e^{-j2\pi\frac{2(N-1)}{N}} & \cdots & e^{-j2\pi\frac{(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix}$$

(c) $X_{n+mN} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{(n+mN)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} e^{-j2\pi mk} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = X_n \quad \left(\because e^{-j2\pi mk} = 1\right)$

(d) $X_{N-n}^* = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\frac{(N-n)k}{N}}\right)^* = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j2\pi\frac{(N-n)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k\frac{nk}{N}} e^{j2\pi k} = X_n \quad \left(\because e^{-j2\pi k} = 1\right)$

２．(a)(b)5 点，(c)7 点，(d)8 点，計 25 点

(a) 計算課程は省略．答は$[5, 1-2j, -3, 1+2j]$

(b) 計算課程は省略．答は(a)と同じ．

(c) FFT 演算では，N 点 FFT の計算を，2 つの$N/2$点 FFT（と補助演算）に分解している．最小単位が 2 点 FFT(=DFT)であることを踏まえて逆順にたどると，サンプル点数は$N = 2^n$個の場合に限られる．

(d) 計算量（乗算回数）を比較すると，$N = 2^{n-1}+1$の場合はほぼ同じで，$N > 2^{n-1}+1$がそれより大きい場合は2^n点 FFT の方が計算量が少ない．他方，周波数領域での解像度を考えると，2^n点 FFT の方がN点 DFT よりも点の数が多く高解像度であると言える．上記の理由から2^n点 FFT の方がより効率的であると考えられる．

３．(a)(c)5 点，(b)8 点，(d)7 点，計 25 点

(a) ①のような直流入力の場合，応答が安定した後の出力信号は伝達関数の係数の総和に等しい．①の出力信号を見ると，応答が安定した後は 1 となっている．よって伝達関数の係数の総和は 1 となる．

(b) ①の出力信号を見ると，$k = 15〜20$ 付近で立ち上がっており，このシステムの群遅延特性（遅れ時間）は 15〜20 サンプル程度であると考えられる．
他方，直線位相 FIR フィルタでは
群遅延特性 ＝ インパルス応答の継続時間の半分 ＝（次数－1）の半分

が成り立つことから，このフィルタの次数は 31～41 程度と考えられる．

さらに②の応答を見ると，入力の $k=2$ にピークがあり，対応する出力のピークは $k=17$ または $k=25$ と考えられる． $k=17$ のピークが対応する場合，群遅延特性は 15 サンプルとなり，フィルタの次数は 31 次となる． $k=25$ のピークが対応する場合は，群遅延特性は 23 サンプルとなるが，①の応答からそれほどの遅延があるとは考えにくい．

以上の理由から，31 次と考えられる．

※ 遅れ時間は(次数－１)の半分という理由で約 30～40 次との解答があれば得点を与える．

(c) ②,③に対応する周波数はそれぞれ $f=\dfrac{1}{8T},\dfrac{1}{4T}$ である．振幅特性は，$0\le f\le\dfrac{1}{8T}$ でほぼ 1， $\dfrac{1}{8T}\le f\le\dfrac{1}{4T}$ の間で降下し， $\dfrac{1}{4T}\le f\le\dfrac{1}{2T}$ でほぼ 0 となる（図は省略）．

(d) ④の入力信号は，①と③の入力信号を足して 0.5 倍したものとなっている．
FIR フィルタの線形性より，④の出力信号は，①と③の出力信号を足して 0.5 倍したものとなる．③の出力はほぼ 0 なので，①の出力信号を 0.5 倍したものにほぼ等しい (図は省略)．

4．各 5 点，計 25 点

(a) このフィルタの極は， $3-z^{-1}=0$ より $z=1/3$． 極が単位円の中にあるので安定．

(b) $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}$ より， $\left(3-z^{-1}\right)Y(z)=\left(1+z^{-1}\right)X(z)$

両辺を逆 Z 変換して整理して， $y_k=(y_{k-1}+x_k+x_{k-1})/3$ を得る．

(c) 周波数特性が $H\left(e^{j2\pi fT}\right)=\dfrac{1+e^{-j2\pi fT}}{3-e^{-j2\pi fT}}$ となることから，

振幅特性は $A\left(e^{j2\pi fT}\right)=\sqrt{H\cdot\overline{H}}=\sqrt{\dfrac{1+e^{-j2\pi fT}}{3-e^{-j2\pi fT}}\cdot\dfrac{1+e^{j2\pi fT}}{3-e^{j2\pi fT}}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\pi fT}{5-3\cos 2\pi fT}}$ となる．

よって， $a_1=1, b_0=5, b_1=-3$．

$f=0$ のときは $A\left(e^{j2\pi fT}\right)=\sqrt{\dfrac{1+1}{5-3}}=1$， $f=1/2T$ のときは $A\left(e^{j2\pi fT}\right)=\sqrt{\dfrac{1-1}{5+3}}=0$．

(d) 出力信号は $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{9},\dfrac{25}{27},\ldots,1-\dfrac{2}{3^{k+1}},\ldots\right]$ となる．計算は省略．

(e) 出力信号は $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\ldots,\dfrac{1}{3^{k+1}},\ldots\right]$ となる．計算は省略．