ディジタル信号処理 期末試験（2012/08/03） 略解

１．(a)(c)各 5 点，(b) 10 点，計 20 点

(a) $X_n = \sum_{k=0}^{7} x_k e^{-j2\pi \frac{nk}{8}} = \sum_{k=0}^{7} x_k e^{-j\pi \frac{nk}{4}}$

(b) $a:1,\ b:W^{-1},\ c:-j,\ d:W^{-3},\ e:-1,\ f:W^{3},\ g:j,\ h:W$

(c) $\boldsymbol{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ W^{-1} & W^{-3} & W^{3} & W \\ -j & j & -j & j \\ W^{-3} & W^{-1} & W & W^{3} \end{bmatrix}$

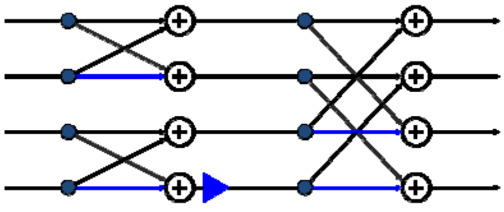
２．(a)(c)(d)各 5 点，(b) 10 点，計 25 点

(a) $x_0, x_4, x_2, x_6, x_1, x_5, x_3, x_7$

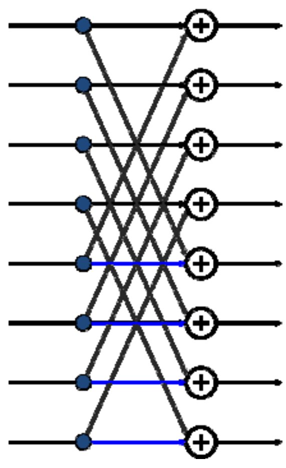
(b) 下図参照．青い矢印は(-1)倍の乗算を，青い三角は$(-j)$倍の乗算を，それぞれ含む．

(c) 中段：$W^{-2} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$， 下段：$W^{-3} = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

(d) 下図参照．青い矢印は(-1)倍の乗算を含む．



(b)



(d)

３．(a)(b)(d)各 5 点，(c) 10 点，計 25 点

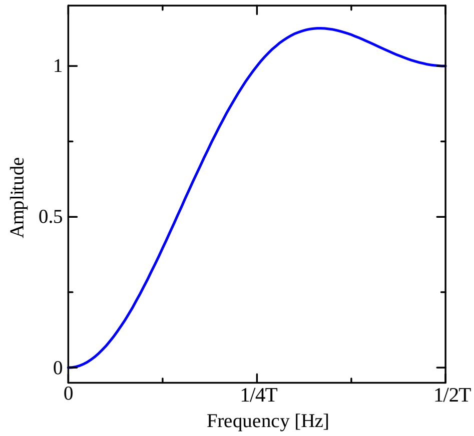
(a) $\left[-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, \ldots\right]$

(b) $\left[-\frac{1}{8}, -\frac{2}{8}, \frac{7}{8}, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\right]$

(c) $A(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{4}\left(3 - 2\cos 2\pi fT - \cos 4\pi fT\right)$

$f = 1/2T$ のときは $A(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{4}\left(3 + 2 - 1\right) = 1$.

グラフは右上図の通り.



(d) (a)の結果からもわかるように，伝達関数の係数の総和が 0 のときは直流入力を通さない．ローパス特性は「ある周波数よりも低い周波数は全て通す」はずが，周波数 $f = 0$ を通さないので，ローパス特性は実現不可能である.

4．(a)(b)(c)(e)各 5 点，(d)10 点，計 30 点

(a) このフィルタの極は，$1 - 2z^{-1} = 0$ より $z = 2$．極が単位円の外にあるので不安定.

(b) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$ より，$\left(1 - 2z^{-1}\right)Y(z) = \left(1 + z^{-1}\right)X(z)$

両辺を逆 Z 変換して整理して，$y_k = 2y_{k-1} + x_k + x_{k-1}$ を得る.

(c) $\left[h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots, h_k, \ldots\right] = \left[1, 3, 6, 12, \ldots, 3 \cdot 2^{k-1}, \ldots\right]$となり発散することから，不安定である.

(d) 周波数特性が $H\left(e^{j2\pi fT}\right) = \frac{1 + e^{-j2\pi fT}}{1 - 2e^{-j2\pi fT}}$ となることから，

振幅特性は $A\left(e^{j2\pi fT}\right) = \sqrt{H \cdot \overline{H}} = \sqrt{\frac{1 + e^{-j2\pi fT}}{1 - 2e^{-j2\pi fT}} \cdot \frac{1 + e^{j2\pi fT}}{1 - 2e^{j2\pi fT}}} = \sqrt{\frac{2 + 2\cos 2\pi fT}{5 - 4\cos 2\pi fT}}$ となる.

よって，$a_1 = 2, b_0 = 5, b_1 = -4$.

$f = 0$ のときは $A\left(e^{j2\pi fT}\right) = \sqrt{\frac{2+2}{5-4}} = \sqrt{4} = 2$，$f = 1/2T$ のときは $A\left(e^{j2\pi fT}\right) = \sqrt{\frac{2-2}{5+4}} = 0$.

(e) 振幅特性の定義および(d)より，周波数特性が $\overline{H}\left(e^{j2\pi fT}\right) = H\left(e^{-j2\pi fT}\right) = \frac{1 + e^{j2\pi fT}}{1 - 2e^{j2\pi fT}}$ であるようなフィルタの振幅特性は，もとの IIR フィルタ $H(z)$ の振幅特性に等しい.

$z = e^{j2\pi fT}$ と対応するとき，$e^{-j2\pi fT} = z^{-1}$ となることから，求める伝達関数は以下となる.

$$\tilde{H}(z) = \left.\frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}\right|_{z = z^{-1}} = \frac{1 + z}{1 - 2z} = -\frac{1 + z^{-1}}{2 - z^{-1}} \qquad \left(\tilde{H}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2 - z^{-1}} \text{ も正解とする}\right)$$