

1. 次の行列 A について. (1) tAA を求めよ. (2) $A \cdot tA$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. A, B の対称行列である時. 次の (1), (2) は同値であることを示せ.

(1) AB は対称行列である. (2) $AB = BA$.

3. 次の行列について. rank (階数) を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

4. 掃き出し法により. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

5. 次の連立1次方程式を解け.

(1)
$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 5 \\ x + 3y - 2z = -10 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 1 \\ -2x + 4y - 2z + 6w = -2 \end{cases}$$

6. 次の同次連立1次方程式を解け.

(1)
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

7. 次の連立1次方程式の解を持つように C の値を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 4 \\ 3x - 2y + z = C \end{cases}$$

8. 次の連立1次方程式について.

(ア) 唯一つの解を持つ (イ) 無数の解を持つ (ウ) 解を持たないと、おぼろけに各場合の c の値を全て求めよ.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + cz = 3 \\ x + cy + 3z = 2 \end{cases}$$

9. 次の行列式の値を求めよ.

(1)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

10. 行列 A が n 次正方正則行列である時、余因子行列 $\text{adj } A$ は次のように定義される:

$$\text{adj } A = (\tilde{A}) \quad , \quad \tilde{A}_{ij} = A_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

ただし.

$$A_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad j$$

: 行列 A の成分の中、 j 行と i 列をとり去った $(n-1)$ 次正方行列の行列式である。

(1) A の逆行列 A^{-1} は $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$ となることを示せ.

(2) 次の A について A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[That's all.]

線形代数 15.1 問題 解答

田村 裕子

1. (1) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$

2. $t(AB) = tB tA$ を用いて証明する。

3. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rank = 2. (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, rank = 3

4. (1) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

5. (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. (1) $c = 5$, 8. (3) $c \neq -3, 2$ (4) $c = 2$, (5) $c = -3$.

9. (1) 1 (2) -55

10. (1) $|A| = 9$

(2) $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -12 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(1) $\pm$

10. (1) の証明. 次の定理を用いる.

[定理] 行列式の計算について, 次数を1つ下げる方程式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & & 0 & & C_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{ij'} & * \cdots * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots \\ C_3 & & 0 & & C_4 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j'} a_{ij'} \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ \vdots & \vdots \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix}$$

[定理] クラメル公式と呼ばれるものである:

$AX = b$ において, $|A| \neq 0$, $A = (a_1 \cdots a_n)$ とおく時, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は次に示すと与えられる.

$$x_j = \frac{|a_1 \cdots b \cdots a_n|}{|A|} \quad ; \text{分子は } A = (a_1 \cdots a_n) \text{ において } a_j \text{ と } b \text{ を入れかえたときの行列式.}$$

今, $|A| \neq 0$, 逆行列を $X = (x_1 \cdots x_n)$ とおけば, A^{-1} を求めることと

$AX = E$ を解くことに相当する. したがって, $(Ax_1 \cdots Ax_n) = (e_1 \cdots e_n)$ ということである. 各方程式 $Ax_j = e_j$ について, クラメル公式を用い,

$$x_j = (x_{ij'})_{i=1, \dots, n} \text{ とおくと } x_{ij'} = \frac{|a_1 \cdots \underbrace{e_j}_{e_j'} \cdots a_n|}{|A|} \quad \leftarrow i\text{-列に } e_j'$$

ここで, 次数を下げる公式を適用して,

$$|a_1 \cdots e_j' \cdots a_n| = \pm A_{ji} e_j'$$

$$\therefore x_{ij'} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad \text{を得る.}$$

(Q.E.D.)

問答

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 対し } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & -1+0 \\ 2+3 & 4+1 & -2+0 \\ -1+0 & -2+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+1 & 3+2+0 \\ 3+2+0 & 9+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

2. (1) $\rightarrow$ (2) の証明

$$AB \text{ が "対称行列" であるから } AB = {}^t(AB) = {}^tB {}^tA \quad \text{--- ①}$$

$$A, B \text{ 共に "対称行列" であるから } {}^tA = A, {}^tB = B \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②を①に代入し } AB = BA$$

(2) $\rightarrow$ (1) の証明

$$\text{②より } AB = BA = {}^tB {}^tA = {}^t(AB) \quad \therefore AB = {}^t(AB)$$

行列 AB とその転置行列 ${}^t(AB)$ が同値であるから AB は対称行列である。

以上より (1) と (2) は同値

$$3. (1) \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,3}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -22 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -22 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}(4)} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -22 \\ 0 & -27 & -85 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{2,2}(-\frac{1}{27})} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -22 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}(-7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,2}(-9)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{rank} = 2$$

No.

Date

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{3,1}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{2,1}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{P_{2,1}(-7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{1,3}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{P_{1,3}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{RANK} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. (1) \quad & A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{1,2}(-1)} \\
 & \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 8 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 8 & -7 \\ 1 & 0 & -9 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{1,2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{1,2}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{3,2}(2)} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{2,3}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{3,1}(2)} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{2,3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \\
 & A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

問答

$$5. (1) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2(-2)}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 & 25 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{3,2(-3)}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 & 25 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -7 & 10 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,1(-1)}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 & 25 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,3(5)}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 12 & 58 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{3,1(3)}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 12 & 58 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 37 & 185 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1(3)}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 12 & 58 \\ 1 & 0 & 34 & 164 \\ 0 & 0 & 37 & 185 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,(-1)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -58 \\ 1 & 0 & 34 & 164 \\ 0 & 0 & 37 & 185 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{3,(\frac{1}{37})}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -58 \\ 1 & 0 & 34 & 164 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,3(-34)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -58 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,3(2)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1(2)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2y-z+3w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{任意 } a, b, c \text{ は任意実数})$$

No.

Date

$$6.11) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hence } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} z = a \in \mathbb{R} \\ x = -3a \end{matrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,2}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,3}(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{1,2}(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,1}(-5)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hence } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問答

$$7. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ C \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & C \end{pmatrix} \text{ とする}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{3,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,2}(-\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{RANK}(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Aと同様の基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & C-5 \end{pmatrix}$$

ここで、 $\text{RANK}(A) = 2$ であるから、与式が解をもつためには $\text{RANK}(A') = 2$ である必要がある。ゆえに $C-5=0 \quad \therefore C=5$ 。

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & C \\ 1 & C & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & C \\ 1 & C & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & C & 3 \\ 1 & C & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & C \\ 1 & C & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & C+2 \\ 1 & C & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & C+2 \\ 0 & C-1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -C-3 \\ 0 & 1 & C+2 \\ 0 & C-1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{3,2}(-C-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -C-3 \\ 0 & 1 & C+2 \\ 0 & 0 & -(C+3)(C-2) \end{pmatrix}$$

よって $C=-3$ または 2 のとき $\text{RANK}(A) = 2$

$C \neq -3, 2$ のとき $\text{RANK}(A) = 3$ である。

与式の未知数の個数は 3 であるから、

A の自由度を d とすると $C \neq -3, 2$ のとき $d = 3 - 3 = 0$ となり

ただ 1 つの解をもつ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & C & 3 \\ 1 & C & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Aと同様の基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -C-3 & 0 \\ 0 & 1 & C+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(C+3)(C-2) & -C+2 \end{pmatrix}$$

(i) $C=2$ のとき $\text{RANK}(A') = 2$ であるから A' の自由度 β とすると $\beta = 3 - 2 = 1 > 0$ より 無数の解をもつ。

(ii) $C=-3$ のとき $\text{RANK}(A') = 3$ より

$\text{RANK}(A) < \text{RANK}(A')$ が成り立つから 解は存在しない。

$$\text{以上より } (7) \text{ } C = -3, 2 \quad (8) \text{ } C = 2 \quad (9) \text{ } C = -3$$

$$9. (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 0 + 15 - 21 + 21 + 0 = 1.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 16 - 6 - 20 - 12 = -55$$

10. (1) (証明)

$AX = b$ において $|A| \neq 0$, $A = (a_{11} \dots a_{1n})$ とかくと $n \times n$ の行列

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ は } x_j = \frac{|a_{11} \dots b \dots a_{1n}|}{|A|}$$

つまり $|A| \neq 0$, $A^{-1} = X$ ($X = (x_1 \dots x_n)$) とおけば

A^{-1} を使えば $AX = E$ と $AX = E$ は同値

の方程式 $AX_j = e_j$ により $n \times n$ の行列

$$X_j = (x_{ij})_{i=1, \dots, n} \text{ である } x_{ij} = \frac{|a_{11} \dots e_{ij} \dots a_{1n}|}{|A|}$$

つまり n 行 j 列の公式を適用して $|a_{11} \dots e_{ij} \dots a_{1n}| = 1 \cdot A_{ji}$

$$\therefore x_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

また、 $A_{ji} = \hat{A}_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), 余因子行列 $\text{adj} A = (\hat{A})$

$$\text{すなわち } A_{ji} = \text{adj} A$$

$$\text{ゆえに } x_{ij} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$$

$$\text{したがって } (x_{ij}) = X = A^{-1} \text{ であり } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A \quad (\text{証明終了})$$

問答

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = 9 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 9$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{31} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -12 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9) の補足

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1 \cdot 7 - 0 \cdot 5) - 3 \cdot (-1 \cdot 7 + 0 \cdot 7) - 3 \cdot (-1 \cdot 5 - (-1) \cdot 7)$$

$$= -14 + 21 - 6$$

$$= 1$$