

Ⅱ. Ewing 法による Young 率の測定

1. 目的

Ewing の装置に金属棒を横たえ、おもりによってこれを bend する際の midpoint 降下を、光のテコの方法によって測定して、その棒の Young 率を算出すること。また、実験 I と同じく測定して得られる多くの基本量から計算して結果を得る間接測定の例である。それぞれの誤差の問題に注意していく必要が大いにある。

2. 理論

一様な棒を、bend したとき、伸縮のない中層 dx が曲率の中心 C を見込む角を $d\theta$ とし、曲率半径を ρ とすれば、中層から z の距離にある断面 dS の平行層の strain としては、

$$\frac{(\rho + z)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{z}{\rho}$$

また、この層に加わる張力を dF とすれば、Young 率の定義から、

$$E = \frac{\frac{dF}{dS}}{\frac{z}{\rho}} \quad \therefore dF = \frac{E}{\rho} z \, d$$

ゆえに、断面に加わる曲げモーメント L としては、

$$L = \int_S dF \cdot z = \frac{E}{\rho} \int_S z^2 dS = \frac{EI}{\rho}$$

ここで、 $I = \int_S z^2 dS$ は、断面 S が中層との交線のまわりの慣性モーメントに相当するものを表す。

次に、図 1 のように、長さが ℓ の片持梁の中層を考えると、一端に M のおもりを掛けたため、 O からの距離が x である dx の部分に相当する微小降下を de とすれば、

$$de = (\ell - x)d\theta = (\ell - x)\frac{dx}{\rho}$$

ところがこの際の曲げモーメントは、

$$L = \frac{EI}{\rho} = Mg(\ell - x)$$

であるから、上二式より曲率半径 ρ を消去し、

$$de = \frac{Mg}{E\ell} (\ell - x)^2 dx$$

したがって、一端降下としては、

$$e = \frac{Mg}{EI} \int_0^\ell (\ell - x)^2 dx = \frac{Mg\ell^3}{3EI}$$

ところが、厚さ a 、幅 b の角棒を、図 2 のように、距離が $d\theta$ の水平支点間に支え、中央に M のおもりを掛けた際の
中点降下としては、上式の ℓ の代わりに $\ell/2$ を、 Mg の代
わりに $Mg/2$ を、 $I = \frac{a^3b}{12}$ とおくことによって、中央降下
として、

$$e = \frac{\frac{1}{2}Mg\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3E\left(\frac{a^3b}{12}\right)} = \frac{Mg\ell^3}{4a^3bE}$$

したがって、棒の Young 率は、

$$E = \frac{\ell^3}{4a^3b} \cdot \frac{Mg}{e} \quad \dots(1)$$

そして、中点降下 e を telescope & scale の方法によって測定するとすれば、

$$e = \frac{z\angle y}{2x}$$

ここで、 x は鏡と尺度との距離、 $\angle y$ はおもりによる望遠鏡の読みの移動、 z は鏡における支点間の垂直距離である。

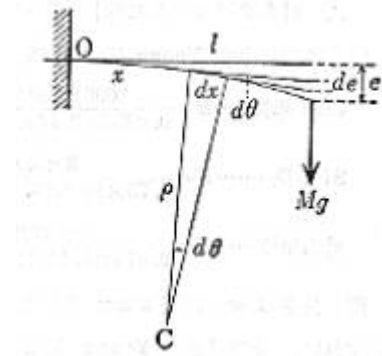


図 1

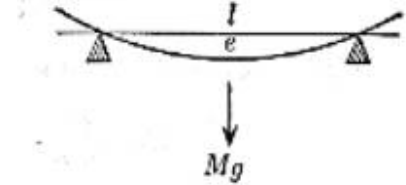


図 2

3. 用具

- ・ Ewing の装置
- ・ 望遠鏡
- ・ スケール

- ・ ノギス
- ・ 巻尺
- ・ 上皿天秤
- ・ 試料（自分の実験では黄銅）
- ・ ライト

4. 方法

Young 率測定のポイントは何と云っても、固体の歪み変形というわずかな変位を正確に測定することである。この点に関して Ewing は、望遠鏡と鏡およびスケールを組み合わせた光テコを応用して困難を解決している。また、試料に歪みを与えるのに、たわみを利用して応力の加減操作を容易にした点も優れた着想といえる。

また、長さというひとつの物理量についてもいろいろな測定法（ノギス、マイクロメーター、光のテコなど）があり、必要に応じて使い分けていることに注意する。グラフを用いての測定状況の直感的な表現方法を習熟するのも必要だ。

従って、この実験のポイントは、光テコ光学系の調整と、試料と、それに応力を加える仕掛けのセッティングにあるといつてよい。以下に実験の手順を述べる。

① 試料の支点間距離 l の測定

メジャーで測定し、0.1mm の位は目分量で読み取る。読み取り誤差は、0.1mm としてよい。

② 試料の寸法の測定

試料棒の厚み a 、および、幅 b を測定する。これらの値は支点間距離 l にくらべて小さいので、メジャーで測ったのでは有効数字の桁数が十分に得られない。そこで、ノギスを用いて測定する。試料の長さのばらつきを確かめるため、5ヶ所ほど測定すればよいであろう。平均値と 2 乗平均誤差を求める。

③ 鏡台の支点間距離 z の測定

鏡台の支点(3本の足)の先端にスタンプインクをつけ、ノートの紙面に印をつける。3点を作る二等辺三角形の高さを測定する。定規を用いて作図し、メジャーを使って 0.1mm の位まで測定する。読み取り誤差は 0.2mm とする。

④ 重りの質量 m_i の測定

重りをのせる順番に 1～5 の番号をつけ、上皿天秤を用いて質量 $m_1, m_2, \dots, m_5$ を測定

しておく。また、それらの順に積み重ねた場合の合計質量 $M_1, M_2, \dots, M_5$ を、それぞれ求めておく。なお、他の二つの重りはそれぞれ 0 番の方は、装置を安定させるために、6 番の方は実験過程に使用するだけなので質量は測定しなくてよい。したがって、1 個の重りをのせた状態が 0 (最初)の状態である。

⑤ 光テコの組み立て・調整と、スケールと鏡の間の距離 x の測定

- 鏡台を試料の中央にのせ、鏡面が垂直、かつ、正面を向くようににする。
- 望遠鏡の十字線がはっきり見えるよう、接眼レンズの焦点を調節する。
- 望遠鏡と鏡のおよそ 2 倍の距離に人を立たせ、衣服の模様などがはっきり見えるよう、望遠鏡のピントを調節する。
- 鏡の中のスケールの目盛が望遠鏡の視野に入るよう、望遠鏡のスタンドの位置を左右に調節する。
- スケールの目盛がはっきり読み取れるよう、望遠鏡のピントを調節する。
- スケールと鏡の間の距離 x を測定する。この場合、読み取り誤差は最小目盛の 10 分の 1 よりかなり大きくならざるを得ないことがわかる。誤差は 0.1mm としてよい。

⑥ たわみの測定と y - M グラフの作成

重りの受け具を試料の中心に、重りによる力が試料の幅全体に平均してかかるようにセットする。最初に 0 番の重りをのせ、装置を安定させ y_0 を読み取る。方眼紙に結果をプロットし、直線性、増・減時の差、などを確かめながら、重りを加えるごとのスケールの目盛 $y_1, y_2, \dots, y_5$ を読み取る。重り 5 個で y_5 を測定し、もう 1 個の重りをのせ、すぐにとりのぞいて y_5' を読み取り、以下順次 y_0' まで読み取る。

⑦ たわみ率の計算

グラフの傾き、 $S = \Delta y / \Delta M$ をたわみ率とよぶことにする。 $S_i = \frac{y_{i+3} - y_i}{M_{i+3} - M_i}$ ($i = 0, 1, 2$) の

測定点を選ぶことにより増・減の往復で 6 個の S が得られる。これから S および ΔS を計算する。

⑧ Young 率の計算

Young 率 E を求める式は(1)の通り、 $E = \frac{\ell^3}{4a^3b} \cdot \frac{\Delta Mg}{e}$ ただし、 $e = \frac{z \cdot \Delta y}{2x}$ である。た

だし、 g は重力加速度、 e はたわみによる中点降下である。(1)の後半の式を前半に代入し、 $S = \Delta y / \Delta M$ を用いて書きなすと、

$$E = \frac{\ell^3}{4a^3b} \cdot \frac{2x}{z} \cdot g \cdot \frac{1}{S} \quad g = 9.79763(m/s^2 \Leftarrow N/kg)$$

となる。ここで、 $1/S$ の係数は、試料および測定系で決まる定数となる。

⑨測定誤差の計算

E の誤差 ΔE を求める式は、

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(3\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{S}}{\bar{S}}\right)^2}$$

で与えられる。

6. 結果

余白不足のため次のページに結果用紙 2 枚とグラフを結果としていれる。

7. 考察

まずは教科書の問から解いていく。

問1 この実験の $E = 9.67 \times 10^{11} [\text{dyn}/\text{cm}^2]$ は何 $[\text{kgw}/\text{mm}^2]$ となるか。

$$N/m^2 = \frac{g}{10^6} \times \text{kgw}/\text{mm}^2 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} 9.67 \times 10^{11} [\text{dyn}/\text{cm}^2] &= 9.67 \times 10^{10} [N/m^2] = \frac{9.67 \times 10^{10} \times 10^6}{9.79763} [\text{kgw}/\text{mm}^2] \\ &= 9.87 \times 10^{15} [\text{kgw}/\text{mm}^2] \end{aligned}$$

問2 この実験の荷重と望遠鏡での尺度の読みを graph に描いてみよ。

→結果のページの参照。

問3 同一質量のある金属で同じ長さの正角棒と丸棒を作ったとすれば、同一荷重に対する中点降下の比はどうか。

丸棒のほうがおもりの重量がかかる面積が小さいので、丸棒のほうが中点降下は大きくなる。

手引き p.10 の問 なぜ、3つおきのデータからたわみ率を出すのか。

1つひとつの誤差が大きくても、3つおきに傾きを求めるとそれぞれの傾きがより平行になっているはずだ。つまり、3つおきにした方がより平均に近い値が出るということである。

ここからは自分の実験結果を参照して考察を進めていく。

(i)長さという点では同じなのに、対象によって測定装置をかえねばならない理由
今回の実験では、試料の幅・厚み、支点間距離、スケールと鏡の間の距離、“たわみ”の量をそれぞれ違う装置で測定している。それぞれを何でその装置で測定したか、他ではなぜいけないかを考えていく。

試料の幅・厚みはノギスで測った。試料の幅・厚みはこの実験で測る長さの中でもっとも小さい値が出る（厚み）。だから、その小さい値に適した装置を使わなければ誤差がでたらめになりかねない。実際、厚みは5mmくらいであり、これを巻尺や定規で測ると、0.1mmの位は目測となり測定誤差がかなり大きくなってしまう。ノギスを使って

測ることで 0.01mm の位までは測定することができ、誤差を大きくとっても $0.01\sim 0.02\text{mm}$ といえる。

支点間距離はメジャーで測った。 l はノギスで測るには大きすぎるし、 z は長さの面ではノギスで測ることのできる長さだが、紙に書いた二つの点の距離はノギスで測ることはできない。したがって、誤差は $0.1\sim 0.2\text{mm}$ となってしまうがメジャーで測らざるを得ない。

スケールと鏡の間の距離も支点間距離の場合と同じ理由から、ノギスでは測ることができず、また適していないので巻尺を使って測定した。

“たわみ”の量はスケールで読み取った。“たわみ”の量はある意味この実験の中で測定される長さで一番小さいともいえるが、Ewing 法による測定では直接“たわみ”の量を求めているわけではない。この固体の歪み変形というわずかな変位は、鏡にうつったスケールの値を望遠鏡で読み取ることで正確に測定することができる。この方法こそが Ewing 法であり、スケールと鏡が組み合わされる装置を使うことで、困難な測定ができるように考案されたものなのだから素直に装置にしたがってスケールで図るのが最も適しているのは言うまでも無い。もちろん鏡の中での長さをノギスで測ることはできない。

以上が対象によって測定装置をかえねばならない理由である。それぞれにもっとも適した装置を使っていたと言うことである。

(ii) 実験結果と定数表の値との誤差の理由

結果として算出された黄銅の Young 率は誤差を含めても約 $0.5\times 10^{10}(\text{N}/\text{m}^2)$ 実際の値よりも小さくなってしまった。よって直接測定したそれぞれの値が正確かどうかを検証していき原因を考えていきたい。

まずは、試料台の支点間距離 l だが、これは実験での測定というよりもむしろ正確に丁寧に測ったかがとわれる数値である。相当雑に測らない限りは的外れな値になるわけなく、自分たちの場合も正確に測れたとっていいのではないだろうか。

ノギスで測った試料の厚さと幅であるが、これはなにも考えずに適当な 5 ヶ所を測ってしまったので、数値的にぶれがでなかった。数値にぶれが無いのはそもそも黄銅の方が正確な直方体であったからかもしれないが。ここでは、平均値を取ればそこまで自分達の値と違うわけでもなかっただろうと考えておくこととする。

この考察では、ずれの最大の原因はスケールの読みだと考えて進めたいのだ。ピントが合わずにあせっていたためである。例えば、鏡が垂直になっているかの確認をしたのはピントがあう前で、ピントがあった後に鏡を移動したにもかかわらずしっかり確認してなく、鏡の位置を左右にずらしたので正確だと考えているスケール-鏡間の距離もずれている可能性もある。

しかしきりがないので、いろいろある可能性の中からもっともずれの原因が高そうな、

たわみ率 S だけに注目する。本来のたわみ率は(他の値が正確だとして)逆算するともう少し小さくなるはずであることがわかった。それにはグラフの傾きがもうすこしゆるやかになればよく、それはつまり、今回の実験では本来よりも大きくたわんでいる、もしくは大きく読み取ってしまった、また、重りの質量の測定が悪いのであれば、重りはもっと軽く測定されているはずであった。

重りの質量を測り間違えるというのはそこまで誤差が出るとは考えられず除くとする。スケールの読み取り間違いも今となってはこの考察で書けるのは反省くらいなのでこれも除く。黄銅がたわみ過ぎているのだとしたら原因は何だろうか。小さな応力の積み重ねのよって起こる金属疲労によりたわみやすくなったのだろうか、などと考えてみたが黄銅を使つての実験をどれだけやっているのかわからない上に、金属疲労のこともほとんどわかってない自分に力説できる考えではない。現時点での知識では、このくらいのことしか考えることができないので、ここで考察を終えることにする。