

I . Borda 振子による g の測定

1. 目的

間接測定の例題として最も基本的な事柄を学ぶため、Borda の振子を用いて、その地の重力の加速度 g を測定すること。間接測定というのはすなわち、振子の長さ (l) や周期 (T) により g をある望む精度で求めることであり、そのために、 l や T をどこまで正確に求める必要があるか。また、どのような工夫が必要か検討し、間接測定における誤差の問題に注意する。

2. 理論

以下の文章中の記号、 l や T は上記「目的」の通りとする。

(1). 単振子と実体振子

よく知られている単振子が、重りを質点とみなす点で理想的機械であるのに対して、Borda の振り子は重りに有限な大きさを考慮したという点で実体的機械である。Borda の振り子による重力加速度 g を求める式、

$$\therefore g = \frac{4\pi^2}{T^2} (l+r) \left\{ 1 + \frac{2r^2}{5(l+r)^2} \right\} \dots (1)$$

は{ }内の第 1 項が単振動の場合を表し、第 2 項が重りを実体とみたときの補正項 (Borda の補正項) になっている。実験で使用する振子は $l \sim 100\text{cm}$ 、 $r = 2\text{cm}$ として、Borda の補正項は 1.6×10^{-4} 程度となる。このことは Borda の振り子というには少なくとも l は 0.01cm まで詳しく、 $\frac{\Delta T}{T}$ は 10^{-4} よりよい相対精度で測定しなければならない。「Borda の振り子による実験」といえるよう、相当に注意深い姿勢が必要である。

以上の考察はまた、単振子として取り扱っても 10^{-4} 程度の精度までは実験可能なことを示している。Borda の振り子の真価を発揮するには、実験者は少なくとも l を 0.01cm まで、周期測定の時刻は 0.1 秒まで読み取り、かつ 10^3 周期以上測定しなければならない (実際には 0.01 秒まで表示されるストップウォッチを用いるので読み取り桁数は十分に取れた)。教科書にある周期の測定法と計算法は振子の 190 回分の振れで 1000 周期分の測定をしたことになる巧みな方法である。

(2). 振幅の影響

ここで、(1)式がどのようにもとまったのかをまとめてみたい。図 1 のように、水平固定軸 O のまわりに剛体の重力による回転運動の方程式は、空気・支点の抵抗を無視すれば、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh \sin \theta \quad \cdots(2)$$

ここで θ は、鉛直線と支点 O と重心 G を結ぶ直線間の角で、それが相当小さい (5° 以下) ならば、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I} \theta$$

ゆえにこの単振動の周期を T とすれば、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad \cdots(3)$$

$$\therefore g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{I}{Mh}$$

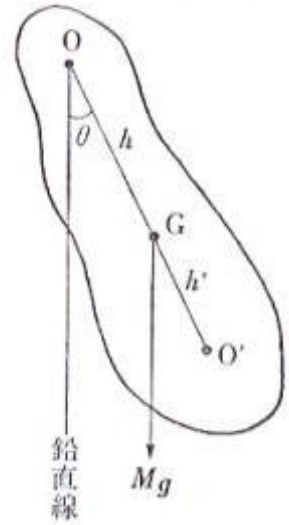


図 1

ところで、 I は支点 O のまわりの慣性モーメントであるから、第 34 図のように針金の長さ l 、球の半径 r の Borda の振り子においては $h = l + r$ であって、

$$I = M(l+r)^2 + M \cdot \frac{2}{5} r^2$$

$$\therefore g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left\{ (l+r) + \frac{2}{5} \cdot \frac{r^2}{(l+r)} \right\} = \frac{4\pi^2}{T^2} (l+r) \left\{ 1 + \frac{2r^2}{5(l+r)^2} \right\} \quad \cdots(1)$$

このように(1)式が決まる。ここで、「(1)式や(3)式が問題にしている精度内で成立するためには θ の振幅 α ($|\theta| \leq \alpha$) をどの位の大きさにして実験を行えばよいか」ということが問題となる。このことを調べるには $\sin \theta$ の展開式 $\sin \theta = \theta - 1/6 \cdot \theta^3 + 1/120 \cdot \theta^5 - \cdots$ において、第 2 項まで考慮すればよい。この時(2)式は、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh \left(1 - \frac{1}{6} \theta^2 \right) \theta \quad \cdots(4)$$

となる。(4)式の θ^3 に比例する項は θ に比例する項で表される力のモーメントを常に減じる働きをしているから、周期 T が $T > T_0$ となることは容易に理解できるであろう。正確に周期 T を求めるには、(2)式を t について積分することにより $d\theta/dt$ を求め、 $T = \int_0^T dt = 4 \int_0^\alpha \left(\frac{dt}{d\theta} \right) d\theta$ の積分を行えばよい。その結果は、角度の振幅 α の二次の項までとると (これは微分方程式(4)式を解いたことに相当する)、

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right) = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right) \quad \cdots(5)$$

となる。したがって、重力加速度 g を求める式は(1)式に振幅の影響を示す補正項が加わって、

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(l+r) \left\{ 1 + \frac{2r^2}{5(l+r)^2} + \frac{1}{8}\alpha^2 \right\} \quad \cdots(6)$$

となる。(ここで、 α^4 の項、第2項と第3項の積の項は小さいとして無視している)。

(1)式以下の議論にあるように、周期 T は $\frac{\Delta T}{T}$ が 10^{-4} より大きい相対精度で測定しなければ(1)式を使う意味がないが、これと同様の考察から、周期に及ぼす振幅の影響がこの程度より大きいときには、(1)式の代わりに、それを考慮に入れた(6)式を用いなければならないことがわかる。振幅の影響の項が Borda の補正項以下になるための条件は、

$$\frac{1}{8}\alpha^2 < 1.5 \times 10^{-4}$$

となり、これから、

$$\alpha < 3.5 \times 10^{-2}(\text{rad}) \sim 2.0^\circ$$

が得られる。これから、(1)式を用いるためには振幅を少なくとも 2° 以内に制限しなければならず、振幅がそれ以上の場合は(6)式を用いる必要がある。

以上の考察をもとに、振幅 α を $1^\circ \sim 2^\circ$ と $5^\circ \sim 6^\circ$ のそれぞれの場合について、両者とも(1)式・(6)式を用いて重力加速度の大きさを求め、得られた数値を比較する。

(3). 誤差の検討について

測定結果を表すのに平均値を掲げるだけでは十分でない。測定誤差、或いは精度を合わせて明示しなければならない。例えば、 $g = 980 \pm 0.4 \text{ cm/sec}^2$ の如く表す。そのためには g を求める根拠となる測定値、この場合 T 、 l 、 r などの精度が知られていなければならない。

振子の長さは $l+r$ という組合せで計算式に使われている。普通 l は金属のものさし、 r はノギスで測定する。したがって r は 1000 分の 1cm 程度まで読み取れるが、一方 l は 100 分の 1cm まで読み取るのがやっとである。いま l を測定した結果 Δl が $\pm 0.02 \text{ cm}$ 程度の精度であったとすれば、 r の読みがそれより精密であっても $(l+r)$ の相対誤差は $\pm 2 \times 10^{-4}$ 程度となってしまう。このことは、

$$\Delta(l+r) = \sqrt{(\Delta l)^2 + (\Delta r)^2} \approx \Delta l \quad (\because \Delta l \gg \Delta r)$$

となることに相当している。

T の場合、測定は 100 周期について 10 回行われている。100 周期分 1 回の測定については、ストップウォッチの読み取り誤差の $1/100$ を ΔT とすればよいが、10 回の測定の平均値についての誤差はこれよりも小さくなることが期待される。この場合、誤差は 10 回の測定値のバラツキ (分布) を統計的に考慮して推定すればよい。ここでは g の誤差 Δg は、

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left\{\frac{\Delta(l+r)}{(l+r)}\right\}^2}$$

で求めればよい。ちなみに ΔT は次の式に従って求めればよい。

$$\Delta T = \frac{1}{100} \cdot \sqrt{\frac{\sum r_i^2}{n(n-1)}}$$

また、筆算により g を求めた場合、 π の数値は得られる g の精度に影響しない程度に十分な桁数をとればよく、いたずらに桁数を多く取るとは精度を上げることにならないばかりか、計算の妨げとなるので好ましくない。計算機で演算した場合に、表示された結果を有効な桁数を考慮せず、丸写しにすることなど論外である。

3. 実験器具

- ・ Borda の振り子（U 字型水平台、エッジ、球錘）
- ・ 水準器
- ・ ものさし
- ・ ノギス
- ・ ストップウォッチ
- ・ マイナスドライバー
- ・ 針金
- ・ 角度目盛用紙

4. 実験手順

- ① 不動柱に取り付けた台の上に U 字方水平台 E を乗せ、E に水準器を乗せ、ねじ C₁、C₂ を調節してこれを水平にする。（英字記号は図 2 参照）
また、球錘の半径 r をノギスで図っておく。この時、球錘は完全な球とはいえないので数回図り平均を取るのがよい。
- ② エッジ DB だけ 10 回ほど振らせてその周期が 2 秒（10 回振るのでストップウォッチの数値がほぼ 20 秒）になるように調節する。球形錘 A に約 1 m 針金をつけ、針金が球錘から抜けかないことを確認し、エッジ DB に取り付けここでもはずれないことを確認。さらに、ものさしで l を図る。
- ③ 鉛直線と $1^\circ \sim 2^\circ$ くらい角度をなすように傾け、静かに離して単振動させる。八の字のような軌道を描くようならやり直す。

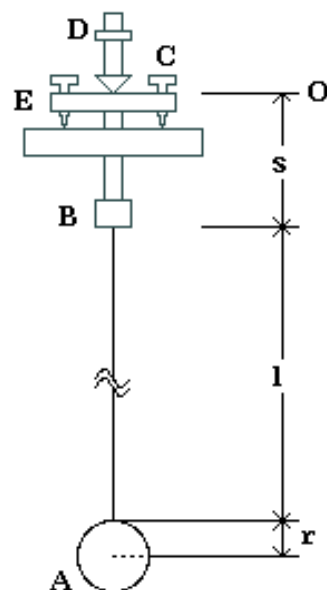


図 2

④ 一人が肉眼で振り子の運動を観測して、針金が視野において振動の中心 N を左から右に通過する瞬間を 10 周期ごとにストップウォッチで時刻をとり、共同者がストップウォッチの数値を記録する。これを 190 周期まで続ける。

⑤ 周期の測定値を記入したら実験結果記入用紙を埋めていく。 $\frac{\Delta(l+r)}{(l+r)}, \frac{\Delta T}{T}, \frac{\Delta g}{g}, g', g, \Delta g$ それぞれ

前記 2 章「理論」の各式に従って出していく。

⑥ ③、④、⑤と同じことを今度は角度が $5^\circ \sim 6^\circ$ ほど傾けて行う。

5. 結果

6. 考察

まずは各問について考えていく。教科書と手引きで同じ問題のものは片方のみ記述する。

問1 周期の平均値をとる場合、はじめの 10 周期の時間から平均を求め、次の 10 周期から 2 つ目の周期を求め、次々に 200 回までの 20 コの平均を求め、それらをさらに平均するというのはナンセンスである。なぜか？

20 コの平均をさらにわざわざ平均しても、全体を一気に平均しても数値は変わらないのではないだろうか。また、平均値は測定する個数が多くなればなるほど信頼性は高まる。だからわざわざ 10 周期ごとに区切って平均値を求めることは信頼性を低くしていることに他ならないから。

問2 ナイフ・エッジの慣性モーメントが考慮されていないが、それでよいのか？
また、その理由は？

最初にエッジの周期を、エッジに針金と球錘をつけたときの周期と同じになるように調節した。また、エッジは台のちょうど中心に乗るようになっている。この二つの理由からナイフ・エッジの慣性モーメントの影響は小さいため考慮に入れる必要はない。

問3 この Borda の振り子に対する単振り子の相当長を求めよ。

理論でも書いたように、単振り子の場合は重りを質点と考える。したがって長さは l である。

問4 針金の質量を計算に入れるとすれば、(3)式はどうなってくるか？

g の式を出す際、慣性モーメントを考えるとときに針金の中心に針金自身の重さがかかると考えるので、針金の重さを m とすると

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{I}{Mh + m\left(\frac{h+h'}{2}\right)}$$

となる。(2 ページ (3) 式の下に記した g の式より)

結論として g は小さくなる。

ここからは実験の結果から考察を行っていく。

(i). 角度を変えて測る必要性

(1)式は振幅 α が 2° よりも小さい場合だけに成立する。この式は近似を使っているため、振幅が 2° よりも大きい場合は使えないことは理論で書いた。振幅が 2° よりも大きいときは振幅の影響が大きくなることを考えてより正確な(6)式を使う必要が出てくる。つまり、(1)式と(6)式の値の差がより大きくなるはずなのだ。なぜ、振幅を変えて測り直すのかというと、それは振幅の影響を確認するためである。

結果を見てみると、 5° よりも大きい場合の(1)式と(6)式の値の差があまり無く、これでは振幅の影響が出ているかの確認ができない。さらに(1)式の方が定数表の値に近い。あらためてレポート作成時に計算をしておしてみた。なぜか微妙に数値がずれたが結果と同じように(1)の方が定数表の値に近いのだ。どこからこの問題が発生したのか突き止めてみたい。

周期の測定はばらつきもあまり見られないことから正確といえよう。また振り子の長さ、球錘の半径も数回測った上で平均を取ったので誤差の範囲内で正確と言っていい。角度とラジアンの関係も間違っていない。これでは何も悪いところは内容に思われるが、値の出し方が甘いものがあった。 α を決めるときに使ったエッジから角度目盛用紙までの長さ、またその中心からずらして振る長さは正確であっても確実にその長さ離して振れたかどうかは疑問が残る。この二点から周期が変わってしまい、その結果が異常に正確な重力の値に現れたものと考えられる。

(ii) 振幅が違うことで値が変わるのはなぜか。

上記(1)でも書いたが、振幅が大きいとその分の影響が出てしまい数値のずれが大きくなる。結果の数値が違ってくるのは振幅が無視できない証拠である。同じく上記(1)の理由で 5° よりも大きい場合の方が定数表の値に近い数字が出てしまったが本当は 2° よりも小さい場合に比べて、不正確な値が出ないといけなはずだ。そもそも、今回の結果は 2° よりも小さい場合のほうの値が正確に出せなかったようだ。その理由はさらに詳しく考察しなおしてみたい。

(iii) $\alpha < 2^\circ$ の場合の実験結果がひどく崩れている（本当の値とずれたわけ）理由。

実は 2° よりも小さい場合を自分たちの組では2回やっている。1回目にやったときの数値が大幅にずれていたの、納得できずもう一回やるべきであると判断し、やり直したのだ。そのこともあって、他が次々に終わっていく中ひとりで残ってやっていた。精神的に、はやるところもあり、周期の値はもちろん、角度目盛用紙を使った振幅の不正確さは否めないところがある。結局は誤差の値が大きかったため定数表の範囲内に入ったので実験を終わることができたのだが、誤差が大きいことから細かいところの不正確がよくわかる。

レポートの最後に反省・感想は不適切かもしれないが、準備段階の正確な測定、集中力の持続が不可欠であったことを始めての実験で思い知らされ、次からは肝に銘じていくつもりである。