

$y = f(x)$ の k 次導関数

$$y^{(k)} = f^{(k)}(x)$$

$$C^k \text{級} \Leftrightarrow f^{(k)} \text{が連続}$$

例) $f(x) = e^x$ について

$$f^{(0)}(x) = e^x$$

$$f^{(1)}(x) = (e^x)' = e^x$$

$$f^{(2)}(x) = (e^x)' = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$f(k)(0) = e^0 = 1$$

例) $f(x) = \sin x$ について

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f^{(1)}(x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$\rightarrow f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k \text{ が偶数}) \\ 1 & (k=4\lambda+1, \lambda \text{ は整数 } \geq 0) \\ -1 & (k=4\lambda+3, \quad ") \end{cases}$$

Taylor の定理

関数 $y = f(x)$ が開区間 I 上 n 回微分可能で
 $a, x \in I$ とすれば,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

となる C が a, x の間にある。

(右辺の式) 有限テイラー展開

$$\begin{aligned}
&= \frac{f^{(0)}(a)}{0!} (x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} (x-a)^1 \\
&+ \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots \\
&+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n
\end{aligned}$$

 $a=0$ の場合は,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \\
&= \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots \\
&+ \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n
\end{aligned}$$

(有限マクローリン展開)

例) $f(x) = e^x$ $n=5$ で有限マクローリン展開 $a=0$

$$\begin{aligned}
f(x) = e^x &= \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^c}{5!} x^5 \\
&= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^c x^5}{5!} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{e^c x^5}{120}
\end{aligned}$$

となる c が 0 と x の間にある。特に $x=1$ のとき,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{e^c}{120}$$

($C \neq 0$ と 1 の間)

$$0 < e^c \leq e^1 = e < 3 \quad \text{なので} \quad \frac{e^c}{120} < \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

$\frac{e^c}{120}$ は誤差 $\frac{1}{40}$ 未満

よって, e の近似値 $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$

例) $f(x) = \sin x$, $n=4$ で有限マクローソンの展開

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(4)}(C)}{4!} x^4 \quad a=0 \\ &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(C)}{4!} x^4 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin C}{24} x^4 \end{aligned}$$

となる C が 0 と x の間にある。

//

a, x 間に C があって.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(C)}{n!} (x-a)^n$$

$\downarrow$
C を a におきかえると.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

f が a の近傍で C^n 級ならば
 a に十分近い x では

$$f(x) \doteq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \leftarrow \text{多項式}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{誤差}}{(x-a)^n} = 0 \quad (n \text{ 次近似})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{!}} \text{ 誤差} &= f(x) - \text{右辺} \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} \{ f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a) \} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{誤差}}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} \{ f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a) \} \rightarrow 0$$

$$\left(\begin{array}{l} f^{(n)}(c) \rightarrow f^{(n)}(a) \\ x \rightarrow a \Rightarrow c \uparrow \rightarrow a \end{array} \right)$$

例) $x=0$ のまわりで 3 次近似 $a=0$.

$$\begin{aligned} e^x &\doteq \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} x^k = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &\doteq \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{1!} x^1 + \frac{(-1)}{3!} x^3 \\ &= x - \frac{x^3}{6} // \end{aligned}$$

f が C^∞ 級とする (何度でも微分可能)

a, x の間に C_n があって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(C_n)}{n!} (x-a)^n}_{\text{残項, 剰余項}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{剰余項} = 0$ ならば

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

(無限テイラー展開)

$a=0$ の場合は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots \end{aligned}$$

(無限マクローリン展開)

例) $f(x) = e^x$ を 無限マクローリン展開

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

//

例) $f(x) = \sin x$ を無限マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

偶数部分はなくなる $\rightarrow \sin x = \frac{1}{1!} x^1 + \frac{(-1)}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{(-1)}{7!} x^7 + \dots$

$$= \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

//

$\lim_{n \rightarrow \infty}$ 剰余項 = 0 になる + 分条件

n によらない実数 $M > 0$ があって、
 a, x 間のどの c についても

$$|f^{(n)}(c)| \leq M^n$$