4/0

問1〜問3 から 2つ選んで解答せよ.

微分積分 I　2005 年度前期・レポート課題（その１）

問 1. (A) 次の関数を微分せよ.

(i) $y = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 1$,　(ii) $y = (3x+1)(x^2+4)$,　(iii) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

(B) 次の関数の不定積分を求めよ.

(iv) $y = x^3 + 6x^2 - 9x - 2$,　(v) $y = 2x^3 - 5x + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$.

(C) 定積分を計算せよ.

(vi) $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)\,dx$,　(vii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$.

問 2. k を実数の定数として, 関数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + k$ を考える.

(1) f の導関数を求めて, f の増減および極値を調べよ.
(2) 点 $(0, k)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の式を求めよ.
(3) $k = 0$ のときの, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.
(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点が 2 つであるときの k の値を求めよ. また, そのとき, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ.

問 3. 以下の文について下の問いに答えよ.

数列 $\langle a_n \mid n = 1, 2, \cdots \rangle$ を, $a_n = \dfrac{1^5 + 3^5 + 5^5 + \cdots + (2n-1)^5}{n^6}$ として定義する. 定積分を使って $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよう. 自然数 n について, 閉区間 $[0, 1]$ を n 等分する分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$; $x_i = i/n$ を考える. 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して, $x_i - x_{i-1} = \boxed{\text{ア}}$ である. また, 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中央の点を ξ_i とすれば, $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2n}$ である. 関数 f を, $f(x) = \boxed{\text{ウ}}\,x^5$ として定義すれば, $f(\xi_i) = \dfrac{(\boxed{\text{イ}})^5}{n^5}$ となるので,

$$(*)\ a_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

<u>関数 f は閉区間 $[0, 1]$ において積分可能</u>であり, $y = \boxed{\text{エ}}$ はその原始関数である. n を大きくしていくと, 分割 Δ_n の幅 $|\Delta_n| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \cdots, n\} = \boxed{\text{ア}}$ は $\boxed{\text{オ}}$ に近づくので, 上の $(*)$ 式より,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \Big[\boxed{\text{エ}}\Big]_0^1 = \boxed{\text{カ}}.$$

(1) $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{カ}}$ に適切な数または式を入れよ.
(2) 下線部が成り立つのは, 関数 f が $\boxed{}$ だからである. この空欄にあてはまる適語を漢字 2 文字 (あるいは, 英単語 1 語) で答えよ.

微分積分 I　2005 年度前期・レポート課題解答（その 1）

$ax^n \to a \cdot nx^{n-1}$　　$\cancel{1} \to x$　$x \to$ 数1　xなし0

問 1. (A)

公式

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad y' &= (3x^5 - 2x^3 + 4x + 1)' = \{3(x^5)' - 2(x^3)' + 4(x)' + (1)'\} \\
&= 3(5x^4) - 2(3x^2) + 4 \cdot 1 + 0 = 15x^4 - 6x^2 + 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad y' &= \{(3x+1)(x^2+4)\}' = (3x+1)'(x^2+4) + (3x+1)(x^2+4)' \\
&= 3(x^2+4) + (3x+1)(2x) = 3x^2 + 12 + 6x^2 + 2x = 9x^2 + 2x + 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(iii)}\quad y' &= \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}\right)' = \frac{(x^2 - 2x + 1)'(x^2 + x + 1) - (x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{(2x - 2)(x^2 + x + 1) - (x^2 - 2x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{3(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \left(= \frac{3(x+1)(x-1)}{(x^2 + x + 1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

(B)

$$
\begin{aligned}
\text{(iv)}\quad \int (x^3 + 6x^2 - 9x - 2)\,dx &= \int x^3\,dx + 6\int x^2\,dx - 9\int x\,dx - 2\int 1\,dx \\
&= \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 9 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \\
&= \frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{9x^2}{2} - 2x \ \left(= \frac{x^4 + 8x^3 - 18x^2 - 8x}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$1 \to x$

$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\frac{1}{x^n} \to \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

$$
\begin{aligned}
\text{(v)}\quad \int \left(2x^3 - 5x + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx &= 2\int x^3\,dx - 5\int x\,dx + 3\int \frac{1}{x^2}\,dx - 2\int \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 3\left(-\frac{1}{1x}\right) - 2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) \\
&= \frac{x^4}{2} - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \ \left(= \frac{x^6 - 5x^4 - 6x + 2}{2x^2}\right)
\end{aligned}
$$

(C)

$$
\text{(vi)}\quad \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
$$

$$
\text{(vii)}\quad \int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2 \cdot 2^2}\right) - \left(-\frac{1}{2 \cdot 1^2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}
$$

問 2. (1) $f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + 12x + k)' = 2(3x^2) - 9(2x) + 12 = 6x^2 - 18x + 12$.
さらに因数分解すると, $f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$.
f の導関数は $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \ (= 6(x-1)(x-2))$

よって,

- $x = 1, 2$ で $f' = 0$.
- 区間 $(-\infty, 1)$ および $(2, \infty)$ で $f' > 0$,
- 区間 $(1, 2)$ で $f' < 0$.

よって, 連続関数 f は,

- 区間 $(-\infty, 1]$ および $[2, \infty)$ で狭義単調増加,
- 区間 $[1, 2]$ で狭義単調減少.
- $x = 1$ のとき, $f(x) = f(1) = 2\cdot 1^3 - 9\cdot 1^2 + 12\cdot 1 + k = 2 - 9 + 12 + k = k + 5$,
- $x = 2$ のとき, $f(x) = f(2) = 2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + k = 16 - 36 + 24 + k = k + 4$.

であるから, 関数 f は, $x = 1$ で極大値 $k + 5$, $x = 2$ で極小値 $k + 4$ をとる.

また, $x \neq 0$ ならば, $f(x) = x^3 \left(2 - \dfrac{9}{x} + \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{k}{x^3}\right)$ で,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{k}{x^3}\right) = 2$$

なので,

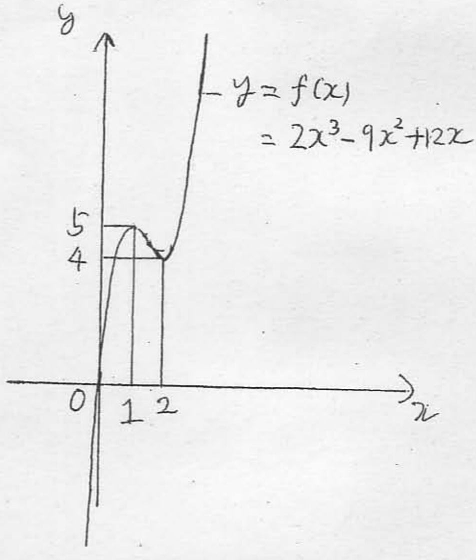
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

f の増減表は次のようになる.

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$	$k+4$	$\nearrow$	(∞)

(2) 点 $\langle 0, k\rangle$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きは, $x = 0$ における f の微分係数 $f'(0) = 6\cdot 0^2 - 18\cdot 0 + 12 = 12$ になる. 求める接線は, $\langle 0, k\rangle$ を通り, 傾き 12 の直線なので, その式は $y = 12x + k$ である.

(3)



微分積分 I　2005 年度前期・レポート課題解答（その 1）の訂正

問 2. (4) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点が 2 つであるためには, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことが必要十分である.

(i) $x=1$ のとき f がとる極大値 $f(1)=k+5$ が 0 に一致する.

(ii) $x=2$ のとき f がとる極小値 $f(2)=k+4$ が 0 に一致する.

(i) の場合, $\underline{k=-5}$ で,

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-5=(x-1)(2x^2-7x+5)=(x-1)^2(2x-5)$$

である. よって, 2 つの交点の x 座標は 1 と 5/2 である.
関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれる領域の符号付面積は,

$$\begin{aligned}\int_1^{5/2} f(x)\,dx &= \int_1^{5/2}(2x^3-9x^2+12x-5)\,dx=\left[2\cdot\frac{x^4}{4}-9\cdot\frac{x^3}{3}+12\cdot\frac{x^2}{2}-5x\right]_1^{5/2}\\ &= \left[\frac{1}{2}x^4-3x^3+6x^2-5x\right]_1^{5/2}\\ &= \left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^4-3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3+6\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)\right\}-\left\{\frac{1}{2}\cdot1^4-3\cdot1^3+6\cdot1^2-5\cdot1\right\}\\ &= \left(\frac{625}{32}-\frac{375}{8}+\frac{150}{4}-\frac{25}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-3+6-5\right)=-\frac{27}{32}\end{aligned}$$

よって, $\underline{\text{求める面積は } \frac{27}{32}}$.

(ii) の場合, $\underline{k=-4}$ で,

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-4=(x-2)(2x^2-5x+2)=(x-2)^2(2x-1)$$

である. よって, 2 つの交点の x 座標は 1/2 と 2 である.
関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれる領域の面積は,

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{2} f(x)\,dx &= \int_{1/2}^{2}(2x^3-9x^2+12x-4)\,dx=\left[2\cdot\frac{x^4}{4}-9\cdot\frac{x^3}{3}+12\cdot\frac{x^2}{2}-4x\right]_{1/2}^{2}\\ &= \left[\frac{1}{2}x^4-3x^3+6x^2-4x\right]_{1/2}^{2}\\ &= \left\{\frac{1}{2}\cdot2^4-3\cdot2^3+6\cdot2^2-4\cdot2\right\}-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4-3\left(\frac{1}{2}\right)^3+6\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\\ &= (8-24+24-8)-\left(\frac{1}{32}-\frac{3}{8}+\frac{6}{4}-2\right)=\frac{27}{32}\end{aligned}$$

よって, $\underline{\text{求める面積は } \frac{27}{32}}$.