微分積分 I　2004 年前期・学期末試験問題

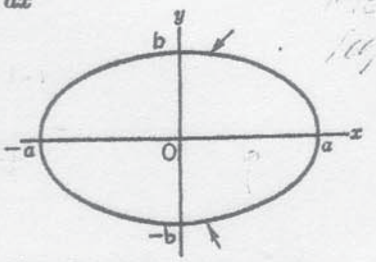
1. 以下の極限, 微分, 積分を計算せよ.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos x}{x}$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n$　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

(iv) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$　(v) $\displaystyle\frac{d}{dx}\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{x^2-2x+2})$　(vi) $\displaystyle\frac{d}{dx}x^x$ $(x>0)$

(vii) $\displaystyle\int(2\cos x+3\sin x)dx$　(viii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx$

(ix) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}$　(x) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$



2. $a,b>0$ とする. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた面積を求めよ.

3. 関数 $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x+2\sqrt{1-x^2}$ の増減を調べ, 極値, 最大値, 最小値を求めよ. また, グラフの概形を描け.

4. 以下の問に答えよ.
   (1) m を自然数, $n=4m$ とする. 関数 $f(x)=\cos x$ を $n-1$ 次まで有限マクローリン展開して n 次の剰余項を用いてあらわせ.
   (2) 条件 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(ax^4+bx^2+c)}{x^4}=0$ をみたす実数 a,b,c を求めよ.

5. 以下の文で, 常に正しいものには「正」, かならずしも正しくないものには「誤」で答えよ. ただし, a,b は実数で, $a<b$ とする. (この問題に限り, 途中経過や説明などは不要.)
   (1) 単調増加でも単調減少でもない実数列は収束しない.
   (2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=0$ を満たす実数列 $\langle a_n \mid n=1,2,\cdots\rangle$ は収束する.
   (3) 狭義単調増加な実数値関数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ について, $f(a)<l<f(b)$ ならば, $f(c)=l$ となる $c\in(a,b)$ がある.
   (4) 実数値関数 $f:(a,b)\longrightarrow\mathbf{R}$ が連続ならば, 有界である.
   (5) 実数値関数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ が連続だからといって, 有界とは限らない.
   (6) 実数値関数 $f:(a,b)\longrightarrow\mathbf{R}$ が微分可能だからといって, 連続とは限らない.
   (7) 実数値関数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ が (a,b) で微分可能ならば, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ となる $c\in(a,b)$ がある.
   (8) $f(0)=0$, $x\neq 0$ では $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ として $f:[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ を定義すると, $f(x)$ は x が 0 に近づくにつれて振動の周期がいくらでも短くなるので, $[0,1]$ で積分できない.
   (9) 実数値関数 $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ が連続ならば,

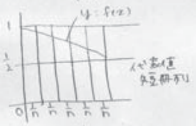
$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\int_a^x f(t)dt\right)'}{x'}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1}=f(a).$$

   (10) $\dfrac{1}{x}$ は $\dfrac{-1}{x^2}$ の原始関数だから, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{-1}{x^2}dx=\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{-1}=2.$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

解 $\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$



$[0,1]$の分割

$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$

$x_k=\frac{k}{n}\quad x_k-x_{k-1}=\frac{1}{n}$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\cdot(x_k-x_{k-1})$

$\to\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=[\arctan x]_0$

$=\arctan 1-\arctan 0$

$=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

微分積分 I　2004 年前期・学期末試験解答

1. (i) ロピタルの定理より,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}+\sin x}{1}=2$$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e>0$, かつ, x^{-1} は $x>0$ で連続なので,

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to+\infty}\{(1+\frac{1}{-n})^{-n}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

(iii) $\frac{1}{1+x^2}$ は $[0,1]$ で積分可能であり,

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[\mathrm{Tan}^{-1}x]_0^1=\mathrm{Tan}^{-1}1-\mathrm{Tan}^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

である. $\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\}$ が $[0,1]$ の分割で, その幅は $n\to0$ のとき 0 に近づくから,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\cdot\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\cdot(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

√

(iv)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)&=\frac{(1-x^2)'(1+x^2)-(1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\\&=\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}\\&=\frac{2x\{-(1+x^2)-(1-x^2)\}}{(1+x^2)^2}\boxed{}\ ?\\&=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

$2x\{-2\}$

$2x\ -1+x^2\ 1+x^2$

$2x\ -2$

(v)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{x^2-2x+2})&=\frac{1}{1+(\sqrt{x^2-2x+2})^2}\cdot(\sqrt{x^2-2x+2})'\\&=\frac{1}{1+x^2-2x+2}\cdot\{(x^2-2x+2)^{\frac{1}{2}}\}'\\&=\frac{1}{x^2-2x+3}\cdot\boxed{\frac{1}{2}(x^2-2x+2)^{-\frac{1}{2}}}\cdot(x^2-2x+2)'\\&=\frac{1}{x^2-2x+3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\cdot(2x-2)\\&=\frac{x-1}{(x^2-2x+3)\sqrt{x^2-2x+2}}\end{aligned}$$

(vi) 対数微分法. $f(x)=x^x$, $g(x)=\log f(x)$ とすると, $g(x)=\log x^x=x\log x$ は $x>0$ で微分可能で, $g'(x)=x'\log x+x(\log x)'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$. よって, $f(x)=e^{g(x)}>0$ は $x>0$ で微分可能で, $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, すなわち,

$$\frac{d}{dx}x^x=f'(x)=f(x)g'(x)=x^x(\log x+1)$$

V

(vii) $\int(2\cos x+3\sin x)dx=2\sin x-3\cos x(+C)$.

(viii)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx&=\int_{-1}^{1}\frac{\boxed{2(2x-3)+(x+2)}}{(2x-3)(x+2)}dx\\&=\int_{-1}^{1}\frac{2}{x+2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2x-3}dx\\&=[2\log(x+2)]_{-1}^{1}+[\frac{1}{2}\log\{-(2x-3)\}]_{-1}^{1}\\&=2\log3-2\log1+\frac{1}{2}\log1-\frac{1}{2}\log5\\&=2\log3-\frac{\log5}{2}(=\log(3^2/5^{1/2})=\log(9/\sqrt{5})=\log(9\sqrt{5}/5))\end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}&=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin^2x}dx\\&=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{1-\cos^2x}dx\\&=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{(\sin x)\{(1+\cos x)+(1-\cos x)\}}{2(1+\cos x)(1-\cos x)}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{1-\cos x}dx+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx\\&=\frac{1}{2}[\log(1-\cos x)]_{\pi/3}^{\pi/2}-\frac{1}{2}[\log(1+\cos x)]_{\pi/3}^{\pi/2}\\&=\frac{1}{2}(\log1-\log\frac{1}{2}-\log1+\log\frac{3}{2})\\&=\frac{\log3}{2}(=\log\sqrt{3})\end{aligned}$$

V

(x)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2x\,dx&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)(\sin x)'dx\\&=[(\cos x)(\sin x)]_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)'(\sin x)dx\\&=(\cos\frac{\pi}{2})(\sin\frac{\pi}{2})-(\cos\frac{-\pi}{2})(\sin\frac{-\pi}{2})-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-\sin^2x)dx\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2x\,dx\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos^2x)dx\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dx-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2x\,dx\end{aligned}$$

$+$

よって,

$$\begin{aligned}2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2x\,dx&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dx\\&=[x]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\pi;\\\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2x\,dx&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと, $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ となる. この楕円に囲まれた部分の面積を S とする. $x=a\sin t$ $(-\pi/2\le t\le\pi/2)$ とおいて置換積分すれば, 1. (x) の結果を使って,

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\frac{dx}{dt}(t)dt\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{b}{a}(a\cos t)(a\cos t)dt\\&=ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2dt=ab\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって, $S=\pi ab$.

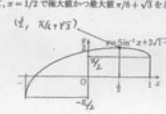
3.

$$\begin{aligned}f'(x)&=(\mathrm{Sin}^{-1}x+2\sqrt{1-x^2})'\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(2(1-x^2)^{1/2})'\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

よって, f の増減は下の表のようになる.

x	-1	$\cdots$	$1/2$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\pi/2$	↗	$\pi/6+\sqrt{3}$	↘	$\pi/2$

よって, $x=1/2$ で極大値かつ最大値 $\pi/6+\sqrt{3}$ をとり, $x=-1$ で最小値 $-\pi/2$ をとる.



4. (1) $x>0$ ならば $0<c_x<x$, $x<0$ ならば $x<c_x<0$ となる c_x があって,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\frac{\cos c_x}{(4m)!}x^{4m}$$

(2) (1) で $m=1$ のときを用いれば,

$$\begin{aligned}\cos x&=f(x)=\frac{(-1)^0}{0!}x^0+\frac{(-1)^1}{2!}x^2+\frac{\cos c_x}{4!}x^4\\&=\frac{1}{1}\cdot1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\cos c_x}{24}x^4\\&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\cos c_x}{24}x^4\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0}c_x=0$ なので, $\cos x$ の連続性により,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-(\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{2}x^2+1)}{x^4}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos c_x}{24}x^4-\frac{1}{24}x^4\right)/x^4\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos c_x}{24}-\frac{1}{24}\right)\\&=0\end{aligned}$$

よって, $a=1/24$, $b=-1/2$, $c=1$ は要求されている条件をみたす.
逆に, 実数 a,b,c が条件 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-(ax^4+bx^2+c)}{x^4}=0$ をみたすとするとき, $a=1/24$, $b=-1/2$, $c=1$ となることを示そう.

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-(\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{2}x^2+1)}{x^4}-\frac{\cos x-(ax^4+bx^2+c)}{x^4}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{(ax^4+bx^2+c)-(\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{2}x^2+1)}{x^4}\\&\lim_{x\to0}\frac{(a-\frac{1}{24})x^4+(b+\frac{1}{2})x^2+(c-1)}{x^4}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0}x^4=0$ であるから,

$$0=\lim_{x\to0}\left((a-\frac{1}{24})x^4+(b+\frac{1}{2})x^2+(c-1)\right)=c-1$$

よって, $c=1$.

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to0}\frac{(a-\frac{1}{24})x^4+(b+\frac{1}{2})x^2+(c-1)}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(a-\frac{1}{24})x^4+(b+\frac{1}{2})x^2}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(a-\frac{1}{24})x^2+(b+\frac{1}{2})}{x^2}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ であるから,

$$0=\lim_{x\to0}\left((a-\frac{1}{24})x^2+(b+\frac{1}{2})\right)=b+\frac{1}{2}$$

よって, $b=-1/2$.

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to0}\frac{(a-\frac{1}{24})x^4+(b+\frac{1}{2})x^2+(c-1)}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(a-\frac{1}{24})x^4}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{a-\frac{1}{24}}{1}=a-\frac{1}{24}\end{aligned}$$

よって, $a=1/24$.

5. すべて「偽」である.
(1) $a_n=(-1)^n/n$; $(n=1,2,\cdots)$ が反例.
(2) $b_1=1$; $b_2=b_3=1/2$; $b_4=b_5=b_6=1/3$; $b_7=b_8=b_9=b_{10}=1/4$; $\cdots$ として, $a_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると, $(a_n\mid n=1,2,\cdots)$ が反例である. $(\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty)$
(3) $a=0,b=2$; $f(x)=x$ $(0\le x\le1)$; $f(x)=2x$ $(1<x\le2)$; $l=3/2$ とすると, これが反例となる.
(4) $a=0,b=1$; $f(x)=1/x$ が反例.
(5) 実数の有界閉区間で連続な実数値関数は最大値・最小値をもつので, 特に有界でもある.
(6) 微分可能な関数は連続である.
(7) $a=0,b=1$; $f(x)=0(x\neq1)$, $f(1)=1$ が反例.
(8) f は $x\neq0$ では明らかに連続であるが, $\sin\frac{1}{x}$ は有界で, $\lim\limits_{x\to0}x=0$ なので, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, すなわち, f は $x=0$ でも連続である. f は $[0,1]$ で連続なので, 積分可能である.
(9) $a\neq0$ では $\lim_{x\to a}x=a\neq0$ なので, ロピタルの定理は使えない. $a=1$, $f(t)=1$ が反例.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x}&=\lim_{x\to1}\frac{[t]_1^x}{x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x}\\&=\frac{\lim_{x\to1}(x-1)}{\lim_{x\to1}x}\\&=0/1=0\neq1=f(1)=f(a).\end{aligned}$$

(10) $1/x$ は $x=0$ で不連続 (定義すらされない) ので, 微積分の基本定理は使えない. また, $\frac{-1}{x^2}$ は負の値しかとらない関数なので, 正数 2 を積分値にとることはありない.

[配点] 1. 4. 各 5 点, 2. 3. は 10 点, 5. は各 2 点.