

2012/02/14

2011 年度 機械系の数学演習Ⅱ 期末試験 (Am2 機械工学 EP)

担当： 松本裕昭教授

※ 試験時間 90 分

※ 途中退室可

※ 座席自由

※ 問題用紙と解答用紙は、ともに回収

※ う p 主が手計算で解いたものです。Mathematica などでもチェックしていません。

間違いじゃないかと思ったら、各自で修正してください(´・ω・`)

明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

[1] 関数  $z = ye^x$  について、 $\frac{\partial z}{\partial x}$  および  $\frac{\partial z}{\partial y}$  を求めよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x$$

[2] 変数  $x, y$  が媒介変数  $r, s$  によって

$$x = r + s + rs$$

$$y = 1 + r + s + 2rs$$

と表されるとき、

$z = f(x, y) = r + 2s + rs$  について、 $\frac{\partial z}{\partial x}$  および  $\frac{\partial z}{\partial y}$  を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \\ &= (1+s) \cdot \frac{1}{1+s} + (2+r) \cdot \frac{1}{1+r} \\ &= 1 + \frac{2+r}{1+r} \\ &= \frac{(1+r) + (2+r)}{1+r} \\ &= \frac{3+r}{1+r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} \\
&= (1+s) \cdot \frac{1}{1+2s} + (2+r) \cdot \frac{1}{1+2r} \\
&= \frac{1+s}{1+2s} + \frac{2+r}{1+2r} \\
&= \frac{(1+s)(1+2r) + (2+r)(1+2s)}{(1+2r)(1+2s)} \\
&= \frac{(1+2r+s+2rs) + (2+r+4s+2rs)}{(1+2r)(1+2s)} \\
&= \frac{3+3r+5s+4rs}{(1+2r)(1+2s)}
\end{aligned}$$

[3] 次の重積分の値を求めよ。

$D = \{(x, y) : (0, 0), (5, 1), (5, 5) \text{ で囲まれた三角形の内部} \}$

$$\iint_D (x+y) dx dy$$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, \frac{1}{5}x \leq y \leq x\}$$

$$\iint_D (x+y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^5 \left\{ \int_{\frac{1}{5}x}^x (2x+2y) dy \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 \left[ 2xy + y^2 \right]_{\frac{1}{5}x}^x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 \left\{ (2x^2 + x^2) - \left( \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{25}x^2 \right) \right\} dx \\
&= \frac{32}{25} \int_0^5 x^2 dx \\
&= \frac{32}{25 \cdot 3} \left[ x^3 \right]_0^5
\end{aligned}$$

$$= \frac{32}{25 \cdot 3} \cdot 125$$

$$= \frac{160}{3}$$

[4] 次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D (e^{x^2+y^2}) dx dy$$

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2\}$$

を極座標 $(r, \theta)$ に変換する。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

とおくことで

$$D \rightarrow E = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

と変換される。このとき、ヤコビの行列式は、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = (\cos \theta)(r \cos \theta) - (-r \sin \theta)(\sin \theta) = r$$

これより、

$$\iint_D (e^{x^2+y^2}) dx dy$$

$$= \iint_D \left\{ e^{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \right\} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} dr d\theta$$

$$= \iint_D (r e^{r^2}) dr d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_1^2 (e^{r^2}) (2r) dr \right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ e^{r^2} \right]_1^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^4 - e) d\theta \\
&= \frac{1}{2} e(e^3 - 1) \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \pi e(e-1)(e^2 + e + 1)
\end{aligned}$$

[5] 次の3重積分の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
&\iiint_U y dx dy dz \\
U &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x \quad x^2 \leq z \leq 4xy\}
\end{aligned}$$

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x\}$  とおく。

$$\begin{aligned}
&\iiint_U y dx dy dz \\
&= \iint_D \left( y \int_{x^2}^{4xy} dz \right) dy dx \\
&= \iint_D (4xy^2 - x^2 y) dy dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^x (4xy^2 - x^2 y) dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{4}{3} xy^3 - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left( \frac{4}{3} x^4 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (5x^4) dx \\
&= \frac{1}{6} \left[ x^5 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

[6]  $y(x)$  は次の1階線形微分方程式をみたしている。

$$x^2 y' + y' + y^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) ①の一般解を求めよ。

変数分離していく。

$$(x^2 + 1)y' + y^2 = 0$$

$$(x^2 + 1)y' = -y^2$$

$$y' = -\frac{y^2}{x^2 + 1}$$

$$-\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int -\frac{y'}{y^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\frac{1}{y} = \arctan^{-1} x + C$$

$$\therefore y = \frac{1}{\arctan^{-1} x + C}$$

(2) ①が  $y(0) = \frac{1}{2}$  であるとき、解を求めよ。

$$y(0) = \frac{1}{\arctan^{-1} 0 + C} = \frac{1}{2}$$

$$\arctan^{-1} 0 + C = 2$$

$$\therefore C = 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{\arctan^{-1} x + 2}$$

[7] 2階微分方程式について以下の問いに答えよ。

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。  $y$  は  $x$  の関数とする。

$$y''+2y'+2y=0$$

特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 1$$

$$(\lambda + 1)^2 = 1$$

$$\lambda + 1 = \pm i$$

$$\therefore \lambda = -1 \pm i$$

したがって、一般解は  $y = e^{-1}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y''+2y'+2y=\sin x$$

特殊解を  $\eta(x)$  とおき

一般解を  $y = e^{-1}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \eta(x)$  として求める。

右辺の  $\sin x$  は、同次方程式  $y''+2y'+2y=0$  の基本解ではないから、

$\eta(x) = k \sin x + l \cos x$  とおける。

$$\eta'(x) = k \cos x - l \sin x$$

$$\eta''(x) = -k \sin x - l \cos x$$

$\eta(x), \eta'(x), \eta''(x)$  をそれぞれ  $y, y', y''$  に代入すると、

$$(-k \sin x - l \cos x) + 2(k \cos x - l \sin x) + 2(k \sin x + l \cos x) = \sin x$$

$$(-k - 2l + 2k) \sin x + (-l + 2k + 2l) \cos x = \sin x$$

$$(k - 2l) \sin x + (2k + l) \cos x = \sin x$$

$$\therefore \begin{cases} k - 2l = 1 \\ 2k + l = 0 \end{cases} \quad \text{これより、} \begin{cases} k = \frac{1}{5} \\ l = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

したがって、特殊解は  $\eta(x) = \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$

$$\therefore y = e^{-1}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$$

[8] 周期  $2\pi$  である次の関数をフーリエ展開せよ。

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

2 乗可積分関数全体において、内積を

$$f_1 \bullet f_2 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) f_2(x) dx$$

で定義する。このとき、自然数  $n \in N$  に対して

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

は直交系となる。互いに異なる要素どうしの内積は 0 であり、同じ要素どうしの内積は 0 ではないことが、直交系の条件である。確認のため書いておくと、

$$1 \bullet 1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi$$

$$\cos(nx) \bullet \cos(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi \quad (n \in N)$$

$$\sin(nx) \bullet \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \quad (n \in N)$$

$$\cos(kx) \bullet \cos(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(nx) dx = 0 \quad (k, n \in N_0, k \neq n)$$

$$\cos(kx) \bullet \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad (k \in N_0, n \in N)$$

$$\sin(kx) \bullet \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad (k, n \in N, k \neq n)$$

となる。途中式は省略した。

ただし、 $N$  は 1 以上の整数全体（自然数）、

$N_0$  は 0 以上の整数全体を意味している。

ここでノルムを

$$\|f_1\| \equiv \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|^2 dx} = \sqrt{f_1 \bullet f_1}$$

で定義する。直交系をそれぞれのノルムで除して正規化すると

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

となる。この正規直交系でフーリエ係数を求める。

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \end{aligned}$$

奇関数なので、 $a_0 = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \end{aligned}$$

奇関数なので、 $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \end{aligned}$$

偶関数なので

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[ -\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx) dx \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= -\frac{2\sqrt{\pi}}{n} \cdot \cos(n\pi) \\ &= -\frac{2\sqrt{\pi}}{n} \cdot (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{n} \end{aligned}$$

これらのフーリエ係数を用いて、フーリエ級数展開すると、

$$\begin{aligned} F[f(x)] &= a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 0 \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{n} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(nx)}{n} \right\} \\ &= 2 \left\{ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \dots \right\} \end{aligned}$$