平成 23 年度　機械系の数学演習Ｉ　第 10 回
問題

※　うｐ主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしなところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)
明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1,　次の 広義の積分の値を求めよ　：

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$\frac{1}{\sqrt{4-x}}$ は $x<4$ で定義されるため、$x=4-0$ 付近で極限をとって求めることとする。
（広義積分を行う。）

そのため、$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{M\to 4-0}\int_0^M \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$　とおく。

$\sqrt{4-x}=t$ とおく。

$4-x=t^2 \quad \Rightarrow \quad x=4-t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=-2t \quad \Rightarrow \quad dx=-2t\ d$

積分範囲は　x　…　$0\to M$　より、　t　…　$2\to\sqrt{4-M}$

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} &= \lim_{M\to 4-0}\int_2^{\sqrt{4-M}} \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \\
&= \lim_{M\to 4-0}\int_2^{\sqrt{4-M}} \frac{-2tdt}{t} \\
&= \lim_{M\to 4-0}\int_2^{\sqrt{4-M}} (-2)dt \\
&= -2\lim_{M\to 4-0}\int_2^{\sqrt{4-M}} dt \\
&= -2\lim_{M\to 4-0}[t]_2^{\sqrt{4-M}} \\
&= -2\lim_{M\to 4-0}\left(\sqrt{4-M}-2\right) \\
&= -2(0-2)
\end{aligned}$$

$=4$

2, 次の 広義の積分の値を求めよ :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は$-1<x<1$で定義されるため、$x=-1+0$, $x=1-0$付近で極限をとって求めることとする。

（広義積分を行う。）

そのため、$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{(m,M)\to(-1+0,1-0)}\int_{m}^{M}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{(m,M)\to(-1+0,1-0)}\int_{m}^{M}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{(m,M)\to(-1+0,1-0)}\left[\arcsin x\right]_{m}^{M} \\
&= \lim_{(m,M)\to(-1+0,1-0)}\left(\arcsin M-\arcsin m\right) \\
&= \arcsin(1-0)-\arcsin(-1+0) \\
&= \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

3, 次の 広義の積分の値を求めよ :

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ は$x<-1, 0<x$で定義されるため、$x=0+0$付近で極限をとって求めることとする。

（広義積分を行う。）

そのため、$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \lim_{m \to 0+0} \int_m^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$　とおく。

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \lim_{m \to 0+0} \int_m^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$$

$$= \lim_{m \to 0+0} \int_m^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}}$$

$$= \lim_{m \to 0+0} \int_m^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$x+\frac{1}{2}=t$ とおく。

$\frac{dx}{dt}=1 \qquad \Rightarrow \qquad dx=dt$

積分範囲は　$x \quad \cdots \quad m \to 1$　より、　$t \quad \cdots \quad m+\frac{1}{2} \to \frac{3}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \lim_{m \to 0+0} \int_{m+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \lim_{m \to 0+0} \left[\log\left| t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}} \right| \right]_{m+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{m \to 0+0} \left\{ \log\left| \frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} \right| - \log\left| m+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} \right| \right\}$$

$$= \lim_{m \to 0+0} \left\{ \log\left| \frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}} \right| - \log\left| m+\frac{1}{2}+\sqrt{m^2+m+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \right| \right\}$$

$$= \lim_{m \to 0+0} \left\{ \log\left| \frac{3}{2}+\sqrt{2} \right| - \log\left| m+\frac{1}{2}+\sqrt{m^2+m} \right| \right\}$$

$$= \log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) - \log\frac{1}{2}$$

$$= \log\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right) - \log 2^{-1}$$

$$= \log\left(3+2\sqrt{2}\right) - \log 2 + \log 2$$

$$= \log\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

4, 次の積分の値を求めよ :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$I_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$ とおく。

置換 $x = \sin t$ を行う。 $dx = \cos t dt$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{|\cos t|} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \qquad \because \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \text{ より、} \cos t > 0$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)' \sin^{n-1} t dt$$

$$= \left[-\cos t \sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)(\sin^{n-1} t)' dt$$

$$= 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)(n-1)\sin^{n-2} t \cos t dt$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t dt$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cdot (1-\sin^2 t) dt$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} t - \sin^n t) dt$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

したがって、

(i) n が奇数

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot I_{n-4}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot I_{n-6}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$$

$$= \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(ii) n が偶数

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot I_2$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

まとめると、

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \qquad （n \text{ が奇数}）$$

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad （n \text{ が偶数}）$$

5,　次の無限積分の値を求めよ　：

$$\int_{-2}^{\infty}\frac{1}{x^2+4}dx$$

$$\int_{-2}^{\infty}\frac{1}{x^2+4}dx = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_{-2}^{\infty} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

6,　次の無限積分の値を求めよ　：

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\int_{0}^{\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)' e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= -\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= -(0-1)$$

$$= 1$$

7,　次の無限積分の値を求めよ　：

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\int_0^\infty e^{-x}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-x}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\left(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\left\{\left(e^{-x}\right)'\sin x+e^{-x}(\sin x)'\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\left(e^{-x}\sin x\right)'dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-x}\sin x\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(0-0)$$

$$=0$$

8,　次の無限積分の値を求めよ　：

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

$\sqrt{x}=\sin t$ とおく。 $dx=2\sin t\cos t dt$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot 2\sin t\cos t dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cdot\sin t\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\cos t}{|\cos t|}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt \qquad \because \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \quad \text{では、} \cos t > 0$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

9, 次の無限積分の値を求めよ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\cos^2 x\tan^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2+b^2\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$t=\tan x$ とおく。 $dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+b^2t^2}dt$$

$$=\frac{1}{b^2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{a^2}{b^2}+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{b^2}\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2}dt$$

$$=\frac{1}{b^2}\left[\frac{b}{a}\arctan\left(\frac{b}{a}t\right)\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{ab}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{2ab}$$

10, 次の無限積分の値を求めよ :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx \quad (a<b)$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}}dx$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab}}dx$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)-\frac{2ab}{2}}}dx$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2-ab+b^2}{2}\right)}}dx$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}dx$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}dx$$

$$= \left[\arcsin \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\left(\frac{b-a}{2} \right)} \right]_a^b$$

$$= \left[\arcsin \frac{2x - (a+b)}{b-a} \right]_a^b$$

$$= \arcsin \frac{2b - (a+b)}{b-a} - \arcsin \frac{2a - (a+b)}{b-a}$$

$$= \arcsin \frac{b-a}{b-a} - \arcsin \frac{a-b}{b-a}$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin (-1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(- \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \pi$$