

平成 23 年度 機械系の数学演習 I 第 9 回

問題

※ う p 主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしいところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)

明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と両座標軸との間の部分の面積を求めよ。

内部面積を S とおく。

x および y の定義域と値域はそれぞれ $0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 1$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$$

$$S = \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{8}{6} + \frac{6}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

2, 楕円: $4x^2 + 2y^2 = 1$ の囲む面積を求めよ。

$$4x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 = 1 - 4x^2 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 4x^2}$$

内部面積を S とおく。

<対称性>

楕円は軸に対して対称なので、簡単のため、全体の面積の 4 分の 1 にあたる第 1 象限の面

積を求める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-4x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4x^2} dx\end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2} \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{とおく。}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$$

積分範囲は $x \cdots 0 \rightarrow 1$ より、 $\theta \cdots 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \frac{1}{2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \theta| \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta \quad \because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta \geq 0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \{ (\pi + \frac{1}{2} \sin \pi) - (0 + \frac{1}{2} \sin 0) \}\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$\therefore S = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

<二重積分（応用）>

積分領域を $D = \{(x, y) | 4x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ とおく。

$$4x^2 + 2y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq 1$$

$$\text{置換} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}r \cos \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta \end{cases} \quad \text{を行う。}$$

これより、

$$D \rightarrow E = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

ヤコビの行列式は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} r \sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} r$$

$$S = \iint_D dx dy$$

$$= \iint_E \frac{1}{2\sqrt{2}} r dr d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \iint_E 2r dr d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 2r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot [r^2]_0^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3, 次の極方程式で表わされる曲線の内部の面積を求めよ。($a > 0$) :

$$r = a \sin 3\theta$$

<二重積分 (応用)>

(解析学Ⅱで習う二重積分の知識がないと、おそらく無理だと思われる。)

積分領域を D とおく。

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ において、 $r \geq 0$ をみたすのは

$0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi$ 、 $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi$ 、 $\frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$ であるから

$$D = \left\{ (r, \theta) \left| 0 \leq r \leq a \sin 3\theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi \quad \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi \quad \frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi \right. \right\}$$

$$S = \iint_D dx dy$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{より、ヤコビの行列式は}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$S = \iint_D dx dy$$

$$= \iint_D \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(\int_0^{a \sin 3\theta} r dr \right) d\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(\int_0^{a \sin 3\theta} r dr \right) d\theta + \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \left(\int_0^{a \sin 3\theta} r dr \right) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{a \sin 3\theta} d\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{a \sin 3\theta} d\theta + \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{a \sin 3\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta + \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (1 - \cos 3\theta) d\theta + \frac{1}{4} a^2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (1 - \cos 3\theta) d\theta + \frac{1}{4} a^2 \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} (1 - \cos 3\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{4} a^2 \left(\left[\theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} + \left[\theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} + \left[\theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right]_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \right) \\
&= \frac{1}{4} a^2 \left(\left[\frac{1}{3} \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{3} \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right]_{2\pi}^{3\pi} + \left[\frac{1}{3} \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right]_{4\pi}^{5\pi} \right) \\
&= \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{3} \left([\theta - \sin \theta]_0^{\pi} + [\theta - \sin \theta]_{2\pi}^{3\pi} + [\theta - \sin \theta]_{4\pi}^{5\pi} \right) \\
&= \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{3} \left([\theta]_0^{\pi} + [\theta]_{2\pi}^{3\pi} + [\theta]_{4\pi}^{5\pi} \right) \quad \because \sin k\pi = 0 \quad (k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots) \\
&= \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{3} \{ (\pi - 0) - (3\pi - 2\pi) - (5\pi - 4\pi) \} \\
&= \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\pi \\
&= \frac{1}{4} \pi a^2
\end{aligned}$$

※

r の周期は $\frac{2}{3}\pi$ である、という周期性を用いて、

$$S = 3 \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(\int_0^{a \sin 3\theta} r dr \right) d\theta$$

と簡単にしてもよい。

4, つぎの各曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。 :

$$y = \frac{8}{x^2 + 4} \quad y = \frac{x}{2} \quad x = 0$$

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4} \quad g(x) = \frac{x}{2} \text{ とおく。}$$

$f(x)$ と $g(x)$ の交点を求める。

$$\frac{8}{x^2 + 4} = \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 + 4) = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + 4x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 2)\{(x + 1)^2 + 7\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

これより、交点は $(2, 1)$ のみである。

$0 \leq x \leq 2$ において、

$$f(x) - g(x) = \frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x}{2} = \frac{16 - x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)} = \frac{(2 - x)\{(x + 1)^2 + 7\}}{2(x^2 + 4)} \geq 0$$

であるから、 $f(x) \geq g(x)$

面積を S とおくと、

$$S = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{8}{x^2 + 4} dx - \int_0^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= 8 \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 2^2} dx - \frac{1}{4} \int_0^2 2x dx$$

$$= 8 \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_0^2 - \frac{1}{4} [x^2]_0^2 \quad \because \quad \text{公式 : } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$= 4(\arctan 1 - \arctan 0) - \frac{1}{4}(4 - 0)$$

$$= 4 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - 1$$

$$= \pi - 1$$

※ グラフを描くと、一層わかりやすい。

5, つぎの曲線の自閉線内の面積を求めよ。 :

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

<二重積分 (応用)>

(解析学Ⅱで習う二重積分の知識がないと、おそらく無理だと思われる)

面積を S とおくと、 $S = \iint_D dx dy$

ただし、積分領域 D は $D = \{(x, y) \mid x^3 + y^3 - 3xy \leq 0\}$

置換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ を行う。

これより、

$$x^3 + y^3 - 3xy \leq 0 \Leftrightarrow (r \cos \theta)^3 + (r \sin \theta)^3 - 3(r \cos \theta)(r \sin \theta) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow r^2(r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta) \leq 0$$

$r \geq 0$ とすると、

$$\Leftrightarrow r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \leq 3 \cos \theta \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow r(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \leq 3 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow r(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \leq 3 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow r(\sin \theta + \cos \theta)(2 - 2 \sin \theta \cos \theta) \leq 3 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow r(\sin \theta + \cos \theta)(2 - \sin 2\theta) \leq 3 \sin 2\theta$$

$$\Leftrightarrow r(\sin \theta + \cos \theta) \leq \frac{3 \sin 2\theta}{2 - \sin 2\theta}$$

$$\sin \theta + \cos \theta < 0 \text{ のとき、 } r > \frac{3 \sin 2\theta}{(2 - \sin 2\theta)(\sin \theta + \cos \theta)} > 0$$

$$\text{または } r > 0 > \frac{3\sin 2\theta}{(2 - \sin 2\theta)(\sin \theta + \cos \theta)} \quad \text{となり、}$$

r の積分範囲の上限を指定できず、積分不可能となるため、

$$\sin \theta + \cos \theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \quad \frac{7}{4}\pi \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{である。} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{したがって、} \quad 0 \leq r \leq \frac{3\sin 2\theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(2 - \sin 2\theta)}$$

$$\text{これより、} r \text{ の範囲は定まったが、} \frac{3\sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)} \geq 0 \text{ をみたす } \theta \text{ の範囲も考}$$

える必要がある。分母は常に正なので、分子も正でなければならない。

$$3\sin \theta \cos \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\sin 2\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{したがって、} \textcircled{1} \text{ との共通範囲は} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$$

置換により、積分領域 D は

$$D \rightarrow E = \left\{ (r, \theta) \left| 0 \leq r \leq \frac{3\sin 2\theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(2 - \sin 2\theta)} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi \right. \right\}$$

となる。

ヤコビの行列式は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$S = \iint_D dx dy$$

$$= \iint_E \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

$$= \iint_E r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{\frac{3\sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}} r dr \right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[r^2 \right]_0^{\frac{3\sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \frac{3\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)} \right\}^2 d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta\cos^4\theta}{\left\{ \left(1 + \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \right) \cos^3\theta \right\}^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta\cos^4\theta}{\left(1 + \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \right)^2 \cos^6\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\left(1 + \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$\tan\theta = t$ とおく。

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

積分範囲は $\theta \cdots 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ より $t \cdots 0 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} S &= \frac{9}{2} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^3)^2} \cdot 3t^2 dt \end{aligned}$$

$1+t^3 = u$ とおく。

$$\frac{du}{dt} = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad du = 3t^2 dt$$

積分範囲は $t \cdots 0 \rightarrow \infty$ より $u \cdots 1 \rightarrow \infty$

$$S = \frac{3}{2} \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^\infty \\
&= \frac{3}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{\infty} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) \right\} \\
&= \frac{3}{2} \{ 0 - (-1) \} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

6, つぎの曲線の長さを求めよ。 :

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (0 \leq x \leq b; a > 0)$$

長さを L とおく。公式 $L = \int_0^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$ を用いる。

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a} \quad \because \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{x}{a} \right)^2} dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{x}{a} \right)^2} dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{\left(\cosh \frac{x}{a} \right)^2} dx \quad \because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$= \int_0^b \left| \cosh \frac{x}{a} \right| dx$$

$$= \int_0^b \cosh \frac{x}{a} dx \quad \because \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

$$= \left[\frac{1}{a} \sinh \frac{x}{a} \right]_0^b$$

$$= \frac{1}{a} \sinh \frac{b}{a} - \frac{1}{a} \sinh 0$$

$$= \frac{1}{a} \sinh \frac{b}{a}$$

7, つぎの曲線の長さを求めよ。 :

$$\text{等角らせん: } r = e^{a\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi; a \neq 0)$$

長さを L とおく。公式 $L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ を用いる。

与式は極座標系で表わされているので、公式も極座標系に変形する。

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta\right)^2 - 2r \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + (r \sin \theta)^2 \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta\right)^2 + 2r \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + (r \cos \theta)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta\right)^2 + (r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \right\} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \int_A^B \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{d\theta^2}} \cdot d\theta^2$$

$$= \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(ae^{a\theta})^2 + (e^{a\theta})^2} d\theta$$

$$\because r = e^{a\theta} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = ae^{a\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(ae^{a\theta})^2 + (e^{a\theta})^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 + 1)(e^{a\theta})^2} d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^{a\theta})^2} d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} |e^{a\theta}| d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{a\theta} d\theta$$

$$\because e^{a\theta} > 0$$

$$= \sqrt{a^2 + 1} \cdot \left[\frac{1}{a} e^{a\theta} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \cdot [e^{a\theta}]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \cdot (e^{2\pi a} - e^0)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \cdot (e^{2\pi} - 1)$$

8, 次の曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転面の表面積を求めよ :

$$\text{放物線: } y = 2\sqrt{px} \quad (0 \leq x \leq 1; p > 0)$$

表面積を S とおく。公式 $S = \int_A^B 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ を用いる。

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^1 2\pi (2\sqrt{px}) \sqrt{1 + \frac{p}{x}} dx \quad \because y = 2\sqrt{px} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{x}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{p}{x}$$

$$= 4\pi\sqrt{p} \cdot \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{x}} dx$$

$$= 4\pi\sqrt{p} \cdot \int_0^1 \sqrt{x+p} dx$$

$$\sqrt{x+p} = t \quad \text{とおく。}$$

$$t^2 = x + p \quad \Rightarrow \quad 2t \frac{dt}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2t dt = dx$$

$$\text{積分範囲は } x \cdots 0 \rightarrow 1 \quad \text{より } t \cdots \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p+1}$$

$$S = 4\pi\sqrt{p} \cdot \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+1}} t \cdot 2t dt$$

$$= 8\pi\sqrt{p} \cdot \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+1}} t^2 dt$$

$$= 8\pi\sqrt{p} \cdot \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} \pi \sqrt{p} \cdot \left[t^3 \right]_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+1}} \\
&= \frac{8}{3} \pi \sqrt{p} \cdot \left\{ (\sqrt{p+1})^3 - (\sqrt{p})^3 \right\} \\
&= \frac{8}{3} \pi \sqrt{p} \cdot (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) (p+1 + \sqrt{p+1}\sqrt{p} + p) \\
&= \frac{8}{3} \pi (\sqrt{p^2 + p} - p) (2p + \sqrt{p^2 + p} + 1)
\end{aligned}$$

9, 次の曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転面の表面積を求めよ :

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (0 \leq x \leq 3)$$

表面積を S とおく。公式 $S = \int_A^B 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ を用いる。

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$S = \int_0^3 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^3 2\pi \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx$$

$$= \int_0^3 2\pi \cosh x \sqrt{\cosh^2 x} dx$$

$$= \int_0^3 2\pi \cosh x |\cosh x| dx$$

$$= \int_0^3 2\pi \cosh^2 x dx \quad \because y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x > 0$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left\{ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \pi \int_0^3 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^3 \\
&= \frac{1}{4} \pi \left[e^{2x} + 4x - e^{-2x} \right]_0^3 \\
&= \frac{1}{4} \pi \left\{ (e^6 + 12 - e^{-6}) - (e^0 + 0 - e^0) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \pi (e^6 + 12 - e^{-6}) \\
&= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{e^6 - e^{-6}}{2} + 6 \right) \\
&= \frac{1}{2} \pi (\sinh 6 + 6)
\end{aligned}$$

10, 次の曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転面の表面積を求めよ :

$$\text{サイクロイド: } x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi; a > 0)$$

表面積を S とおく。公式 $S = \int_A^B 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ を用いる。

与式は媒介変数で表わされているので、公式も媒介変数表示に変形する。

以下、簡単のため $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ とする。

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = a(1 - \cos t) \\ \dot{y} = a \sin t \end{cases} \Rightarrow dx = a(1 - \cos t) dt$$

$$S = \int_A^B 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_A^B 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} dx \quad \because \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} 2\pi a(1-\cos t) \sqrt{1+\left(\frac{a \sin t}{a(1-\cos t)}\right)^2} \cdot a(1-\cos t) dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{1+\left(\frac{a \sin t}{a(1-\cos t)}\right)^2} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{\frac{\{a(1-\cos t)\}^2 + (a \sin t)^2}{\{a(1-\cos t)\}^2}} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{\frac{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt \quad \because \quad 1-\cos t \geq 0 \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{(1-2\cos t + \cos^2 t) + \sin^2 t} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{1-2\cos t + (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{2-2\cos t} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{1-\cos t} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos t) \sqrt{1-\cos t} \cdot (1+\cos t) \sqrt{1+\cos t}}{(1+\cos t) \sqrt{1+\cos t}} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos^2 t) \sqrt{1-\cos^2 t}}{(1+\cos t) \sqrt{1+\cos t}} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \sqrt{\sin^2 t}}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cdot |\sin t|}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin^2 t \cdot \sin t}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cdot (-\sin t)}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt \right\} \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin^3 t}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt - \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^3 t}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt \right\} \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ \int_0^\pi \frac{1-\cos^2 t}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin t dt - \int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos^2 t}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin t dt \right\}
\end{aligned}$$

$1+\cos t = u$ とおく。

$$\frac{du}{dt} = -\sin t \quad \Rightarrow \quad -du = \sin t \, dt$$

積分範囲は $t \cdots 0 \rightarrow \pi \quad \pi \rightarrow 2\pi$ より $u \cdots 2 \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow 2$

$$\begin{aligned}
S &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ \int_2^0 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot (-du) - \int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot (-du) \right\} \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ -\int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot (-du) - \int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot (-du) \right\} \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ \int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du + \int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du \right\} \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left\{ 2 \int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du \right\} \\
&= 4\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \int_0^2 \frac{1-(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du \\
&= 4\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \int_0^2 \frac{1-(u^2-2u+1)}{u^{\frac{3}{2}}} du \\
&= 4\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \int_0^2 \frac{-u^2+2u}{u^{\frac{3}{2}}} du
\end{aligned}$$

$$= 4\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \int_0^2 \left(-u^{\frac{1}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= 4\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \left[-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \left[-u^{\frac{3}{2}} + 6u^{\frac{1}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi a^2 \cdot (-2\sqrt{2} + 6\sqrt{2})$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi a^2 \cdot 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{64}{3}\pi a^2$$