

平成 23 年度 機械系の数学演習 I 第 8 回
問題

※ う p 主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしいところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)
明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1, 次の定積分の値を求めよ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2 \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 (-\sin x) dx$$

$$\cos x = t \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{とおく。}$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dt = -\sin x dx$$

$$\text{積分範囲は } x \cdots 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ より、 } t \cdots 1 \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx &= -\int_1^0 (1-t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 (1-2t^2+t^4) dt \\ &= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{15}{15} - \frac{10}{15} + \frac{3}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

2, 次の定積分の値を求めよ :

$$\int_1^2 x \log x dx$$

<部分積分法>

$$\begin{aligned}\int_1^2 x \log x dx &= \int_1^2 \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \right\} \log x dx \\&= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \left(\frac{d}{dx} \log x \right) dx \\&= \frac{1}{2} \left[x^2 \log x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\&= \frac{1}{2} \left[x^2 \log x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\&= \frac{1}{2} \left[x^2 \log x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\&= \frac{1}{2} \left[x^2 \log x - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\&= \frac{1}{2} \left\{ (4 \log 2 - 2) - \left(\log 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} \\&= \frac{1}{2} \left(4 \log 2 - \frac{3}{2} \right) \\&= 2 \log 2 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

3, 次の定積分の値を求めよ :

$$\int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_1^2 (-2x\sqrt{4-x^2}) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^2 \left\{ \frac{d}{dx} (4-x^2) \right\} \sqrt{4-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{3}{2} (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d}{dx} (4-x^2) \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \left\{ (4-4)^{\frac{3}{2}} - (4-1)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot (0-3^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

<置換積分法>

$$x = 2 \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{とおく。}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \quad \Rightarrow \quad dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\text{積分範囲は } x \quad \cdots \quad 1 \rightarrow 2 \quad \text{より、} \quad \theta \quad \cdots \quad \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \theta) \sqrt{4-(2 \sin \theta)^2} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \theta) \cdot 2 \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\
&= 8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \sqrt{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta
\end{aligned}$$

$$= 8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta \quad \because \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \cos \theta \geq 0$$

$$= -8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta$$

$\cos \theta = t$ とおく。

$$\frac{dt}{d\theta} = -\sin \theta \quad \Rightarrow \quad dt = -\sin \theta d\theta$$

積分範囲は $\theta \cdots \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ より、 $t \cdots \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 0$

$$\int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx = -8 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 t^2 dt$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^2 dt$$

$$= \frac{8}{3} \left[t^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \sqrt{3}$$

4, 次の定積分の値を求めよ :

$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1} dx$$

※ 公式使用

$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2-1} - \log \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| \right]_1^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(2\sqrt{4-1} - \log|2 + \sqrt{4-1}| \right) - \left(\sqrt{1-1} - \log|1 + \sqrt{1-1}| \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(2\sqrt{3} - \log|2 + \sqrt{3}| \right) - (0 - \log 1) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{3} - \log|2 + \sqrt{3}| \right) \\
&= \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

5, 次の定積分の値を求めよ :

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx$$

<置換積分法>

$$\sqrt{x+1}=t \quad (x=t^2-1) \quad \text{とおく。}$$

$$\frac{dx}{dt}=2t \quad \Rightarrow \quad dx=2t \, dt$$

積分範囲は $x \cdots -1 \rightarrow 0$ より、 $t \cdots 0 \rightarrow 1$

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx = \int_0^1 (t^2-1)t \cdot 2tdt$$

$$= 2 \int_0^1 (t^2-1)t^2 dt$$

$$= 2 \int_0^1 (t^4 - t^2) dt$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{3}{15} - \frac{5}{15} \right)$$

$$= -\frac{4}{15}$$

<部分積分法>

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx &= \int_{-1}^0 x \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right\} dx \\&= \left[x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} dx \\&= -\frac{2}{3} \int_{-1}^0 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx \\&= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \left[(x+1)^{\frac{5}{2}} \right]_{-1}^0 \\&= -\frac{4}{15}\end{aligned}$$

6、次の極限值を求めよ：

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 \qquad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$$

公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$ を用いた。

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} [x^5]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

※ 公式使用

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

7, つぎの不等式を証明せよ :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx < \frac{\pi}{2}$$

<証明>

$$x = \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{とおく。}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad dx = \cos \theta d\theta$$

積分範囲は $x \cdots 0 \rightarrow 1$ より、 $\theta \cdots 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 \theta}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{(1+\sin^2 \theta)(1-\sin^2 \theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}} \cdot \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}} \cdot \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta \quad \because \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta \geq 0 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned}$$

ここで $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より、 $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 \theta \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + \sin^2 \theta} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} \leq 1$$

それぞれ積分すると、常には等号が成り立たなくなるので、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} d\theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} d\theta < \frac{\pi}{2}$$

したがって、

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} dx < \frac{\pi}{2}$$

8, つぎの不等式を証明せよ :

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

<証明>

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{より、} \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \sin^2 x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 x \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x \leq 1 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

それぞれ積分すると、常には等号が成り立たなくなるので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} < \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} < \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

したがって、

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

9, つぎの不等式を証明せよ :

$$\log(1 + \sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^n}} < 1 \quad (n \geq 2)$$

<証明>

積分範囲 $0 \leq x \leq 1$ においては、 $0 \leq x^n \leq x^{n-1} \leq x^{n-2} \leq \dots \leq x^2 \leq x^1 \leq x^0 = 1$
これより、

$$1 \leq 1 + x^n \leq \dots \leq 1 + x^2 \leq 1 + x \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{1 + x^n} \leq \dots \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{1 + x} \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leq \dots \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x^n}} \leq 1$$

したがって、

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x^n}} \leq 1$$

それぞれ積分すると、必ずしも等号は成り立たないので、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^n}} dx < \int_0^1 dx$$

※ $n = 2$ のときのみ、等号成立。

$$\left[\log \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx < [x]_0^1$$

$$\log(1+\sqrt{2}) \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx < 1$$

10, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ。 :

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ について考える。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{n!}{n^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \cdots \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\log \frac{1}{n} + \log \frac{2}{n} + \log \frac{3}{n} + \cdots + \log \frac{n-3}{n} + \log \frac{n-2}{n} + \log \frac{n-1}{n} + \log \frac{n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{k}{n} \\ &= \int_0^1 \log x dx \end{aligned}$$

$\log x$ は $x > 0$ で定義されるため、 $x = 0+0$ 付近で極限をとって考える。

(広義積分を行う。)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \int_0^1 \log x dx \\ &= \lim_{m \rightarrow 0+0} \int_m^1 \log x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} \int_m^1 x' \log x dx \\
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} \left([x \log x]_m^1 - \int_m^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} \left([x \log x]_m^1 - \int_m^1 dx \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} \left([x \log x]_m^1 - [x]_m^1 \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} [x \log x - x]_m^1 \\
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} \{ (1 \log 1 - 1) - (m \log m - m) \} \\
&= \lim_{m \rightarrow 0+0} (-1 - m \log m + m) \\
&= -1 - \lim_{m \rightarrow 0+0} m \log m + \lim_{m \rightarrow 0+0} m \\
&= -1 - \lim_{m \rightarrow 0+0} \frac{\log m}{\left(\frac{1}{m} \right)}
\end{aligned}$$

$\lim_{m \rightarrow 0+0} (\text{分子}) = \infty$, $\lim_{m \rightarrow 0+0} (\text{分母}) = \infty$ より、ロピタルの定理を用いると、

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= -1 - \lim_{m \rightarrow 0+0} \frac{\left(\frac{1}{m} \right)}{\left(-\frac{1}{m^2} \right)} \\
&= -1 - \lim_{m \rightarrow 0+0} (-m) \\
&= -1
\end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$