平成23年度　機械系の数学演習Ⅰ　第6回
問題

※ うｐ主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしなところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)
明らかな間違いを発見された方は、wikiのコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1,　つぎの関数を積分せよ　：

$$\cos x \sin 3x$$

<3倍角の公式を用いる方法>

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\
&= (2\sin x \cos x)\cos x + \sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\
&= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^3 x \\
&= 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

$$\int \cos x \sin 3x dx = \int \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\cos x dx$$

$t = \sin x$とおく。$\dfrac{dt}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad dt = \cos x dx$

$$\begin{aligned}
\int \cos x \sin 3x dx &= \int \left(3t - 4t^3\right)dt \\
&= \frac{3}{2}t^2 - t^4 + C \\
&= \frac{3}{2}\sin^2 x - \sin^4 x + C
\end{aligned}$$

<式変形>

$$\begin{aligned}
\cos x \sin 3x &= \cos x \sin(2x + x) \\
&= \cos x\left(\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x\right)
\end{aligned}$$

$$=\sin 2x\cos^2 x+\sin x\cos 2x\cos x$$

$$=2\sin x\cos^3 x+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$$

$$=2\sin x\cos^3 x+\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$=-2\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\cos^3 x\cdot(-\sin x)+\frac{1}{16}\cdot 4\sin 4x$$

$$\int\cos x\sin 3xdx=\int\left\{-\frac{1}{2}\cdot 4\cos^3 x\cdot(-\sin x)+\frac{1}{16}\cdot 4\sin 4x\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\{4\cos^3 x\cdot(-\sin x)\}dx+\frac{1}{16}\int(4\sin 4x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^4 x-\frac{1}{16}\cos 4x+C$$

補足

$$=-\frac{1}{2}(1-\sin^2 x)^2-\frac{1}{16}(1-2\sin^2 2x)+C$$

$$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)-\frac{1}{16}(1-8\sin^2 x\cos^2 x)+C$$

$$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)-\frac{1}{16}\{1-8(1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x\}+C$$

$$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)-\frac{1}{16}(1-8\sin^2 x+8\sin^4 x)+C$$

$$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)-\frac{1}{16}(1-8\sin^2 x+8\sin^4 x)+C$$

$$=-\frac{1}{16}\{(8-16\sin^2 x+8\sin^4 x)+(1-8\sin^2 x+8\sin^4 x)\}+C$$

$$=-\frac{1}{16}(9-24\sin^2 x+16\sin^4 x)+C$$

$$=\frac{3}{2}\sin^2 x-\sin^4 x+C-\frac{9}{16}$$

$$=\frac{3}{2}\sin^2 x-\sin^4 x+C$$

2,　つぎの関数を積分せよ　：

$$\cos^4 x$$

<式変形>

$$\cos^4 x = (1-\sin^2 x)\cos^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) - \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) - \frac{1}{8}\left(1-\cos 4x\right)$$

$$\int \cos^4 x dx = \int \left\{ \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) - \frac{1}{8}\left(1-\cos 4x\right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 2x\right)dx - \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

<漸化式>

$I_n = \int \cos^n x dx$ とおく。

$$I_n = \int \cos^n x dx$$

$$= \int \cos x \cos^{n-1} x dx$$

$$= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x (\cos^{n-1} x)' dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x (n-1)(\cos^{n-2} x)(-\sin x) dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(\cos^{n-2}x-\cos^{n}x)dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}xdx-(n-1)\int\cos^{n}xdx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_{n}$$

$$I_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$$

$$nI_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin x\cos^{3}x+\frac{3}{4}I_2$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin x\cos^{3}x+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}I_0\right)$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin x\cos^{3}x+\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}(x+C) \qquad \because \quad I_0=\int dx=x+C$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin x\cos x\left(\cos^2 x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{8}x+C$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin x\cos x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{8}x+C$$

$$I_4=\frac{1}{8}\sin 2x\cdot\frac{1}{2}(4+\cos 2x)+\frac{3}{8}x+C$$

$$I_4=\frac{1}{16}\sin 2x(4+\cos 2x)+\frac{3}{8}x+C$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 2x\cos 2x+\frac{3}{8}x+C$$

$$I_4=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{3}{8}x+C$$

3, つぎの関数を積分せよ　:

$$\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$$

a, A は定数とする。以下の 2 つの公式を証明する。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$

<(1) の証明>

$x = a\sin\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta \quad \Rightarrow \quad dx = a\cos\theta d\theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - (a\sin\theta)^2}} a\cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)}}d\theta$$

$$= \int \frac{a\cos\theta}{a\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta \qquad \because \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos\theta \ge 0$$

$$= \int d\theta$$

$$= \theta + C$$

$x = a\sin\theta$ より $\sin\theta = \frac{x}{a}$ であるから、逆関数をとると $\theta = \arcsin\frac{x}{a}$

したがって、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

<(2) の証明>

$t - x = \sqrt{x^2 + A}$ とおく。この両辺を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}(t-x)=\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+A}$$

$$\frac{dt}{dx}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}+1$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x+\sqrt{x^2+A}}{\sqrt{x^2+A}}$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$\frac{1}{t}dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$$

(1) (2) より、

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}dx$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+\log\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$$

4, つぎの関数を積分せよ :

$$\cos^5 x$$

<置換積分>

$$\int\cos^5 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2\cos xdx$$

$$=\int(1-\sin^2 x)^2\cos x dx$$

$t=\sin x$　とおく。

$$\frac{dt}{dx}=\cos x \qquad \Rightarrow \qquad dt=\cos x\ d$$

$$\int\cos^5 x dx=\int(1-t^2)^2 dt$$

$$=\int(1-2t^2+t^4)dt$$

$$=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C$$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

<漸化式>

$I_n=\int\cos^n x dx$ とおくと、$I_n=\dfrac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ となる(証明は問題２参照)。

$$I_n=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_5=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}I_3$$

$$I_5=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}I_1\right)$$

$$I_5=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin x\right)+C$$

$$I_5=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{15}\sin x\cos^2 x+\frac{8}{15}\sin x+C$$

$$I_5=\frac{1}{15}\sin x\cos^2 x(3\cos^2 x+4)+\frac{8}{15}\sin x+C$$

$$I_5=\frac{1}{15}\sin x(1-\sin^2 x)\{3(1-\sin^2 x)+4\}+\frac{8}{15}\sin x+C$$

$$I_5=\frac{1}{15}\sin x(1-\sin^2 x)(7-3\sin^2 x)+\frac{8}{15}\sin x+C$$

$$I_5=\frac{1}{15}\sin x(7-10\sin^2 x+3\sin^4 x)+\frac{8}{15}\sin x+C$$

$$I_5=\frac{7}{15}\sin x-\frac{10}{15}\sin^3 x+\frac{3}{15}\sin^5 x+\frac{8}{15}\sin x+C$$

$$I_5=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

5,　つぎの関数を積分せよ　：

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}$$

<置換積分(i)>

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=-\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos x}\cdot(-\sin x)dx$$

$t=\cos x$　とおく。

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x \qquad \Rightarrow \qquad dt=-\sin x\ d$$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=-\int\frac{1-t^2}{t}dt$$

$$=\int\frac{t^2-1}{t}dt$$

$$=\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\log|t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$$

<置換積分(ii)>

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^3 x\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^3 x}{\left(1-\sin^2 x\right)}\cdot(\cos x)dx$$

$t=\sin x$　とおく。

$$\frac{dt}{dx}=\cos x \qquad \Rightarrow \qquad dt=\cos x\ d$$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{t^3}{1-t^2}dt$$

$$=\int\left(\frac{t^3-t}{1-t^2}+\frac{t}{1-t^2}\right)dt$$

$$=\int\left(-t-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{1-t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(2t+\frac{-2t}{1-t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\log\left|1-t^2\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}\log\left|1-\sin^2 x\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 x\right)-\frac{1}{2}\log\left|\cos^2 x\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log\left|\cos x\right|+C-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log\left|\cos x\right|+C$$

<式変形>

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\int\frac{\sin x-\sin x\cos^2 x}{\cos x}dx$$

$$=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\cos x\right)dx$$

$$=\int\left\{\frac{-(\cos x)'}{\cos x}-\frac{1}{2}\sin 2x\right\}dx$$

$$=-\log\left|\cos x\right|+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$$=-\log\left|\cos x\right|+\frac{1}{4}\left(2\cos^2 x-1\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log\left|\cos x\right|+C'$$

6,　つぎの関数を積分せよ　：

$$\tan^3 x$$

<置換積分その(1)>

$t=\tan x$　とおく。

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x dx &= \int \frac{t^3}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{t\left(1+t^2\right)-t}{1+t^2}dt \\
&= \int \left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt \\
&= \int \left(t-\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\log\left|1+t^2\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\log\left|1+\tan^2 x\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{\cos^2 x}\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\log\left|\cos x\right|^{-2}+C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x+\log\left|\cos x\right|+C
\end{aligned}$$

<置換積分その(2)>

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx \\
&= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\left(-\sin x\right)dx
\end{aligned}$$

$t=\cos x$　とおく。

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x \qquad \Rightarrow \qquad dx=-\sin x\ d$$

$$\int \tan^3 x dx=-\int \frac{1-t^2}{t^3}dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) dt$$

$$= -\log|t| - \frac{1}{2t^2} + C$$

$$= -\log|\cos x| - \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x| + C'$$

7,　つぎの関数を積分せよ　：

$$\sqrt{\sin x}\cos^3 x$$

$t = \sqrt{\sin x}$　とおく。

$$t^2 = \sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2t\dfrac{dt}{dx} = \cos x \\ t^4 = 1 - \cos^2 x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x\,dx = 2t\,dt \\ \cos^2 x = 1 - t^4 \end{cases}$$

$$\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx = \int \sqrt{\sin x}\left(\cos^2 x\right)\left(\cos x dx\right)$$

$$= \int t\left(1 - t^4\right) \cdot 2t dt$$

$$= 2\int \left(t^2 - t^6\right) dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{7}t^7 \right) + C$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + C$$

$$= \frac{2}{21}\left(7 - 3\sin^2 x\right)\sin x\sqrt{\sin x} + C$$

8,　つぎの関数を積分せよ　：

$$(\log x)^3$$

<漸化式>

$I_n=\int(\log x)^n dx$ とおく。

$$I_n=\int(\log x)^n dx$$

$$=\int x'(\log x)^n dx$$

$$=x(\log x)^n-\int x\left\{\frac{d}{dx}(\log x)^n\right\}dx$$

$$=x(\log x)^n-\int xn(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}dx$$

$$=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx$$

$$=x(\log x)^n-nI_{n-1}$$

$$I_0=\int(\log x)^0 dx=\int 1\cdot dx=x+C$$

$$I_1=x(\log x)^1-1\cdot I_0=x\log x-(x+C)=x\log x-x-C$$

$$I_2=x(\log x)^2-2\cdot I_1=x(\log x)^2-2(x\log x-x-C)=x(\log x)^2-2x\log x+2x+2C$$

$$I_3=x(\log x)^3-3\cdot I_2$$

$$=x(\log x)^3-3\{x(\log x)^2-2x\log x+2x+2C\}$$

$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x+C$$

9,　つぎの関数を積分せよ　：

$$e^x(x\cos x+\sin x)$$

$I=\int e^x(x\cos x+\sin x)dx$　とおく。

$$I = \int e^x (x\cos x + \sin x)dx$$

$$= \int (e^x)'(x\cos x + \sin x)dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x) - \int e^x (x\cos x + \sin x)' dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x) - \int e^x (\cos x - x\sin x + \cos x)dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x) - \int e^x (2\cos x - x\sin x)dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x) - \int (e^x)'(2\cos x - x\sin x)dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x) - \left\{ e^x (2\cos x - x\sin x) - \int e^x (2\cos x - x\sin x)' dx \right\}$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x) - e^x (2\cos x - x\sin x) + \int e^x (-2\sin x - \sin x - x\cos x)dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x - 2\cos x + x\sin x) - \int e^x (x\cos x + \sin x)dx - 2\int e^x \sin x dx$$

$$= e^x (x\cos x + \sin x - 2\cos x + x\sin x) - I - 2\int e^x \sin x dx$$

$$2I = e^x (x\cos x + \sin x - 2\cos x + x\sin x) - 2\int e^x \sin x dx$$

ここで、以下の公式を用いる。a, b は $a^2 + b^2 \neq 0$ をみたす定数とするとき、

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C$$

<証明>

$I(a,b) = \int e^{ax} \sin bx dx$ とおく。

$$I(a,b) = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) \right\} \sin bx dx$$

$$= \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)\sin bx - \int \left(\frac{1}{a}e^{ax} \cdot b\cos bx\right) dx + C$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) \right\} \cos bx dx + C$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left\{\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)\cos bx-\int\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)(-b\sin bx)dx\right\}+C$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin b\ x\ dx\right)+C$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I(a,b)+C$$

$$\therefore\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I(a,b)=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx+C$$

$$(a^2+b^2)\cdot I(a,b)=ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx+C$$

$$\therefore\qquad I(a,b)=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

これより、$a=1,b=1$を代入すると、

$$I(1,1)=\int e^x\sin xdx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C\quad\Rightarrow\quad 2\int e^x\sin xdx=e^x(\sin x-\cos x)+C$$

したがって、

$$2I=e^x(x\cos x+\sin x-2\cos x+x\sin x)-e^x(\sin x-\cos x)+C$$

$$2I=e^x(x\cos x+\sin x-2\cos x+x\sin x-\sin x+\cos x)+C$$

$$2I=e^x(x\cos x+x\sin x-\cos x)+C$$

$$\therefore\qquad I=\int e^x(x\cos x+\sin x)dx=\frac{1}{2}e^x\{(x-1)\cos x+x\sin x\}+C$$

10, つぎの関数を積分せよ　:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$x=\tan\theta\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$　とおく。

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+x^2\qquad\Rightarrow\qquad d\theta=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}d\theta$$

$$= \int |\cos\theta| d\theta$$

$$= \int \cos\theta d\theta \qquad \because \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad \cos\theta \geq 0$$

$$= \sin\theta + C$$

$$= \tan\theta\cos\theta + C$$

$$= \tan\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} + C \qquad \because \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$