平成 23 年度　機械系の数学演習Ⅰ　第 5 回
問題

※　うｐ主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしなところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・｀)
明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1,　$f''(x)$ が連続で、$f''(a)\neq 0$ がのとき、平均値の定理：

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\quad (0<\theta<1)$$

の θ について、$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ を証明せよ。

<証明>
$f'(x)$ に上記の平均値の定理を適用すると、

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\theta hf''(a+\theta\theta' h)\quad (0<\theta'<1)$$

をみたす θ' が存在する。この両辺に h を掛けると、

$$hf'(a+\theta h)=hf'(a)+\theta h^2 f''(a+\theta\theta' h)$$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ より、

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\theta h^2 f''(a+\theta\theta' h)\qquad ・・・(1)$$

また、$f(x)$ は少なくとも 2 階微分可能なので、$f(x)$ を $x=a$ でテイラーの定理を適用すると、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''\bigl(a+\theta''(x-a)\bigr)\cdot(x-a)^2$$

をみたす θ'' が存在する。これより、

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}f''\bigl(a+\theta'' h\bigr)\cdot h^2\qquad ・・・(2)$$

(1)(2)より、

$$f(a)+hf'(a)+\theta h^2 f''(a+\theta\theta' h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}f''\bigl(a+\theta'' h\bigr)\cdot h^2$$

$$\theta h^2 f''(a+\theta\theta' h)=\frac{1}{2}f''\bigl(a+\theta'' h\bigr)\cdot h^2$$

$$\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''\bigl(a+\theta'' h\bigr)\cdot h^2}{h^2 f''(a+\theta\theta' h)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a+\theta''h)}{f''(a+\theta\theta'h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a)}{f''(a)}=\frac{1}{2}$$

2,　つぎの関数のマクローリン展開を x^2 まで求めよ　：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ とおく。

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(1+x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}-1}\frac{d}{dx}(1+x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}-1}\frac{d}{dx}(1+x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

と推測する。これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(1+x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^1}{dx^1}f(x)=(-1)^1\cdot\frac{(2-1)!!}{2^1}\cdot(1+x)^{-\frac{2+1}{2}}=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

したがって、$n=1$ のとき成立する。

[2]　$n=k$ のときの成立を仮定した上で、$n=k+1$ のときも成立するか検証する。

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x)=(-1)^k\cdot\frac{(2k-1)!!}{2^k}\cdot(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}$$

この両辺を微分すると、

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}f(x)=(-1)^k\cdot\frac{(2k-1)!!}{2^k}\cdot\left(-\frac{2k+1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(1+x)$$

$$=(-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k+1)(2k-1)!!}{2^{k+1}}\cdot(1+x)^{-\frac{2k+3}{2}}$$

$$=(-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\cdot(1+x)^{-\frac{2k+3}{2}}$$

$$=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\{2(k+1)-1\}!!}{2^{k+1}}\cdot(1+x)^{-\frac{2(k+1)+1}{2}}$$

したがって、$n=k+1$のときも成立する。

[1][2]より、すべての自然数nにおいて$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$が成り立つ。

これより、$\frac{d^n}{dx^n}f(0)=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}$　（ただし、$f(0)=1$）であるから、
与式をマクローリン展開すると、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}f(0)\cdot x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot x^n\right)$$

$$=f(0)+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot(-1)^2\cdot\frac{5!!}{2^2}\cdot x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot x^n\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot x^n\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{15}{8}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot x^n\right)$$

3,　つぎの関数のマクローリン展開を x^3 まで求めよ　：

$$e^x \cos x$$

$f(x) = e^x \cos x = e^x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$$f'(x) = e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^x \left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= e^x \cdot \sqrt{2} \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$f''(x) = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) + \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$= \sqrt{2} e^x \left\{\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \cdot \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$= 2e^x \sin(x + \pi)$$

$$f'''(x) = 2e^x \sin(x + \pi) + 2e^x \cos(x + \pi)$$

$$= 2e^x \{\sin(x + \pi) + \cos(x + \pi)\}$$

$$= 2e^x \cdot \sqrt{2} \sin\left\{(x + \pi) + \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= 2\sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$$

$\vdots$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sin\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)$$

と推測する。これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$$\frac{d^1}{dx^1}f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^1 e^x\sin\left(x+\frac{1+2}{4}\pi\right)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

したがって、$n=1$ のとき成立する。

[2]　$n=k$ のときの成立を仮定した上で、$n=k+1$ のときも成立するか検証する。

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^k e^x\sin\left(x+\frac{k+2}{4}\pi\right)$$

この両辺を微分すると、

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^k e^x\sin\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)+\left(\sqrt{2}\right)^k e^x\cos\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^k e^x\left\{\sin\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^k e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left\{\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)+\frac{1}{4}\pi\right\}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{k+1} e^x\sin\left\{x+\frac{(n+1)+2}{4}\pi\right\}$$

したがって、$n=k+1$ のときも成立する。

[1][2]より、すべての自然数 n において $\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sin\left(x+\frac{n+2}{4}\pi\right)$ が成り立つ。

これより、$\frac{d^n}{dx^n}f(0)=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n+2}{4}\pi\right)$　（ただし、$f(0)=1$）であるから、

与式をマクローリン展開すると、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}f(0)\cdot x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n+2}{4}\pi\right)\cdot x^n\right\}$$

$$=f(0)+\left(\sqrt{2}\right)^1\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\pi\cdot x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\cdot x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n+2}{4}\pi\right)\cdot x^n\right\}$$

$$=f(0)+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x+0\cdot x^2+\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n+2}{4}\pi\right)\cdot x^n\right\}$$

$$=1+x-\frac{1}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n+2}{4}\pi\right)\cdot x^n\right\}$$

4, つぎの関数のマクローリン展開を x^2 まで求めよ ：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \cdots(x\neq 0)\\ 1 & \cdots(x=0)\end{cases}$$

まず、$f(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうか確かめる必要がある。
そのために、$x=0$ で連続であることを示す。

$\lim_{x\to 0}(\text{分子})=\lim_{x\to 0}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{e^x}=1$$

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{e^x}=1$$

$\lim_{x\to -0}f(x)=f(0)=\lim_{x\to +0}f(x)=1$ であるから、$x=0$ で連続。

次に、$x=0$ において微分可能であるか判定するために、$x=0$ における微分係数 $f'(0)$ の存在を調べる。

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0}\quad=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\quad=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{e^h-1}-1}{h}\quad=\lim_{h\to 0}\frac{h-e^h+1}{h(e^h-1)}$$

$\lim\limits_{h\to 0}(\text{分子})=\lim\limits_{h\to 0}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{d}{dh}\left(h-e^h+1\right)}{\dfrac{d}{dh}\left\{h(e^h-1)\right\}}=\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{(e^h-1)+he^h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{he^h+e^h-1}$$

$\lim\limits_{h\to 0}(\text{分子})=\lim\limits_{h\to 0}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{d}{dh}\left(1-e^h\right)}{\dfrac{d}{dh}(he^h+e^h-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-e^h}{(e^h-he^h)+e^h}=\lim_{h\to 0}\frac{-e^h}{e^h(2-h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2-h}=-\frac{1}{2}$$

$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ と一定値に収束するため、$x=0$ で微分可能。

したがって、$f(x)$ はすべての x において微分可能である。

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}=\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2} & \cdots(x\neq 0)\\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \cdots(x=0)\end{cases}$$

同様に、$f'(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうか確かめる必要がある。

そのために、$x=0$ で連続であることを示す。

$\lim\limits_{x\to 0}(\text{分子})=\lim\limits_{x\to 0}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to -0}f'(x)=\lim_{x\to -0}\frac{(1-x)e^x-e^x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to -0}\frac{(1-x)-1}{2(e^x-1)}=\lim_{x\to -0}\frac{-x}{2(e^x-1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -0}\frac{x}{e^x-1}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +0}f'(x)=\lim_{x\to +0}\frac{(1-x)e^x-e^x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to +0}\frac{(1-x)-1}{2(e^x-1)}=\lim_{x\to +0}\frac{-x}{2(e^x-1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to +0}\frac{x}{e^x-1}=-\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to -0}f'(x)=f'(0)=\lim\limits_{x\to +0}f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ であるから、$x=0$ で連続。

次に、$x=0$ において微分可能であるか判定するために、$x=0$ における微分係数 $f''(0)$ の存在を調べる。

$$
\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h-0} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(1-h)e^h-1}{(e^h-1)^2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2(1-h)e^h-2+(e^h-1)^2}{2(e^h-1)^2 h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2e^h-2he^h-2+(e^{2h}-2e^h+1)}{2(e^h-1)^2 h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2he^h-1}{2(e^h-1)^2 h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{e^{2h}-2he^h-1}{h^2}\right)}{2\left(\dfrac{e^h-1}{h}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2he^h-1}{h^2} \qquad \because \quad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1
\end{aligned}
$$

$\lim_{h\to 0}(\text{分子})=\lim_{h\to 0}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$
f''(0)=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{d}{dh}\left(e^{2h}-2he^h-1\right)}{\dfrac{d}{dh}\left(h^2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-2(e^h+he^h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-e^h-he^h}{h}
$$

$\lim_{h\to 0}(\text{分子})=\lim_{h\to 0}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$
f''(0)=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{d}{dh}\left(e^{2h}-e^h-he^h\right)}{\dfrac{d}{dh}h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-e^h-(he^h+e^h)}{1}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-2e^h-he^h}{1}=0
$$

$f''(0)=0$ と一定値に収束するため、 $x=0$ で微分可能。
したがって、 $f'(x)$ はすべての x において微分可能である。

$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$、 $f''(0)=0$ より、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}f(0)\cdot x^n\right)$$

$$=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot f''(0)\cdot x^2+R_3$$

$$=1-\frac{1}{2}x+R_3$$

5,

(1) $y=\arctan x$ に対して、つぎの漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) (1) の漸化式を利用して、$y^{(n)}(0) \quad (n=1,2,3,\cdots)$ の値を求めよ。

(3) (2) の結果を利用して、$\arctan x$ のマクローリンの展開を求めよ。

(1)

$$y=\arctan x \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad 1=(1+x^2)y'$$

ライプニッツの公式を用いて、両辺を微分すると

$$0=\sum_{k=0}^{n}\left[{}_nC_k\cdot\left\{\frac{d^k}{dx^k}(1+x^2)\right\}\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}y'\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[{}_nC_k\cdot\left\{\frac{d^k}{dx^k}(1+x^2)\right\}\cdot y^{(n-k+1)}\right]$$

$$={}_nC_0\cdot(1+x^2)\cdot y^{(n+1)}+{}_nC_1\cdot\left\{\frac{d}{dx}(1+x^2)\right\}\cdot y^{(n)}+{}_nC_2\cdot\left\{\frac{d^2}{dx^2}(1+x^2)\right\}\cdot y^{(n-1)}+0+\cdots+0$$

$$=(1+x^2)\cdot y^{(n+1)}+n\cdot 2x\cdot y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot y^{(n-1)}$$

$$=(1+x^2)\cdot y^{(n+1)}+n\cdot 2x\cdot y^{(n)}+n(n-1)\cdot y^{(n-1)}$$

$\therefore \quad (1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$

(2)

$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$

$x=0$ を代入すると、

$y^{(n+1)}(0) + n(n-1)y^{(n-1)}(0) = 0$

ここで、数列 a_n を $a_n = y^{(n)}(0)$ と定義すると、

$a_{n+1} = -n(n-1)a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = -(n+1)\cdot n \cdot a_n$

(i)　n が偶数のとき、	(ii)　n が奇数のとき、
$a_0 = y(0) = \arctan 0 = 0$	$a_1 = y'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$
$a_2 = -(0+1)\cdot 0 \cdot a_0 = 0$	$a_3 = -(1+1)\cdot 1 \cdot a_1 = (-1)\cdot 2 \cdot 1$
$a_4 = -(2+1)\cdot 2 \cdot a_2 = 0$	$a_5 = -(3+1)\cdot 3 \cdot a_3 = (-1)^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$a_6 = -(4+1)\cdot 4 \cdot a_4 = 0$	$a_7 = -(5+1)\cdot 5 \cdot a_5 = (-1)^3 \cdot 6!$
$a_8 = -(6+1)\cdot 6 \cdot a_6 = 0$	$a_9 = -(7+1)\cdot 7 \cdot a_7 = (-1)^4 \cdot 8!$

これより、

(i)　n が偶数のとき、$y^{(n)}(0) = 0$

(ii)　n が奇数のとき、$y^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (n-1)!$

厳密には数学的帰納法による証明が必要だが、簡単のため、ここでは省略する。

------------------＜よりスマートな答え方＞--

$y^{(n)}(0)$ の符号が $0 \to + \to 0 \to - \to \cdots$ となっていることから、

三角関数(正弦曲線)を用いて、

$$y^{(n)}(0)=(n-1)!\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

と表せることも知っておくとよい。

---

(3)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n\right)$$

$$=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+\frac{y^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5+\cdots$$

$$=\left(y(0)+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+\cdots\right)+\left(y'(0)\cdot x+\frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{y^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5+\cdots\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y^{(2k)}(0)}{2k!}\cdot x^{2k}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}\right\}$$

$$=0+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k\cdot(2k)!}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k\cdot(2k)!}{(2k+1)\cdot(2k)!}\cdot x^{2k+1}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot x^{2k+1}\right\}$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\cdots$$

6,　マクローリン展開を用いて、つぎの極限値を求めよ　:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{x^3}$$

$x>1$において、与式は微分可能である。
それぞれ定義域内でマクローリン展開しよう。

$(i)\qquad f_1(x)=\sqrt{1-x}$

$$\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)$$

$$=(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f_1(x)=(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)$$

$$=(-1)^3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}f_1(x)=(-1)^3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{d}{dx}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=(-1)^3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(1-x)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-1)$$

$$=(-1)^5\cdot\frac{3}{2^3}\cdot(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f_1(x)=(-1)^5\cdot\frac{3}{2^3}\cdot\frac{d}{dx}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=(-1)^5\cdot\frac{3}{2^3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(1-x)^{-\frac{7}{2}}\cdot(-1)$$

$$=(-1)^7\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^4}\cdot(1-x)^{-\frac{7}{2}}$$

$\vdots$

$$\frac{d^n}{dx^n} f_1(x) = (-1)^{2n-1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}} = -\frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (n \geq 2)$$

これより、 $$\frac{d^n}{dx^n} f_1(0) = \begin{cases} (n=0) \Rightarrow 1 \\ (n=1) \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \\ (n \geq 2) \Rightarrow -\dfrac{(2n-3)!!}{2^n} \end{cases}$$

(ii) $\qquad f_2(x) = \sin\frac{x}{2}$

$$\frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{d}{dx}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2^2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f_2(x) = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \frac{1}{2^3} \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \frac{1}{2^3} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$\vdots$

$$\frac{d^n}{dx^n} f_2(x) = \frac{1}{2^n}\sin\frac{x + n\pi}{2}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f_2(0) = \frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

(iii) $\qquad f_3(x) = \cos\frac{x}{2}$

$$\frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{1}{2} f_3(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n}{dx^n} f_3(x) = 2 \cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f_2(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n} f_3(0) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\sin\frac{(n+1)\pi}{2} = \frac{1}{2^n}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$$

(i) (ii) (iii) より

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot x^3 + R_4'$$

$$\sin\frac{x}{2} = 0 + \frac{1}{2}x + 0 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot (-1) \cdot x^3 + R_4''$$

$$-\cos\frac{x}{2} = -1 + 0 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot (-1) \cdot x^2 + 0 + R_4'''$$

（総和） ＝ $0 \quad +0 \quad +0 \quad -\dfrac{1}{12}x^3 \quad +R_4$

$$R_4=\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}f_1(0)\cdot x^n\right)+\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}f_2(0)\cdot x^n\right)-\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}f_3(0)\cdot x^n\right)$$

$$=\sum_{n=4}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{d^n}{dx^n}f_1(0)+\frac{d^n}{dx^n}f_2(0)+\frac{d^n}{dx^n}f_3(0)\right)\cdot x^n\right\}$$

これより、

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^3+R_4}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{d^n}{dx^n}f_1(0)+\frac{d^n}{dx^n}f_2(0)+\frac{d^n}{dx^n}f_3(0)\right)\cdot x^n\right\}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{12}+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{d^n}{dx^n}f_1(0)+\frac{d^n}{dx^n}f_2(0)+\frac{d^n}{dx^n}f_3(0)\right)\cdot x^{n-3}\right\}\right]$$

$$=-\frac{1}{12}+0$$

$$=-\frac{1}{12}$$

7, マクロ―リン展開を用いて、つぎの極限値を求めよ ：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x\arctan x-x^2}{x^6}$$

以下の基本関数のマクロ―リン展開を用いる。（証明略）

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{13}}{13!}-\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right\}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{12}}{12!}-\cdots$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\cdots$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot\arctan x-x^2}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\arctan x-x^2}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\arctan x-x^2\cos x}{x^6\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}-x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right\}}{x^6\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right\}}$$

以下、x の n 次以上の項を、まとめて R_n と表すことにする。

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+R_7\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+R_7\right)-x^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}{x^6\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left\{x^2-\left(\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{3!}\right)+\left(\frac{x^6}{3\cdot3!}+\frac{x^6}{5}+\frac{x^6}{5!}\right)+R_8\right\}-\left(x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}+R_8\right)}{x^6\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left\{x^2-\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot x^4+\left(\frac{5\cdot4}{3\cdot5!}+\frac{3\cdot4!}{3\cdot5!}+\frac{3}{3\cdot5!}\right)\cdot x^6+R_8\right\}-\left(x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}+R_8\right)}{x^6\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left\{x^2-\frac{x^4}{2}+\left(\frac{20}{360}+\frac{72}{360}+\frac{3}{360}\right)\cdot x^6+R_8\right\}-\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+R_8\right)}{x^6\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{95}{360}x^6+R_8\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{15}{360}x^6+R_8\right)}{x^6\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{80}{360}x^6+R_8}{x^6\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{9}+R_2}{1+R_2}$$

$$=\frac{2}{9}$$

8, つぎの不等式が、付記の区間で成り立つことを証明せよ :

$$1-x+\frac{x^2}{2}>e^{-x}>1-x \quad (x>0)$$

(i) $1-x+\frac{x^2}{2}>e^{-x}$ の証明

$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$ とおく。

$f'(x)=-1+x+e^{-x}$

$f''(x)=1-e^{-x}$

$x>0$ のとき、 $f''(x)>0$

よって、 $f'(x)$ は $x\geq 0$ で増加する。

ゆえに、 $x>0$ のとき、 $f'(x)>f'(0)=0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。
ゆえに、 $x > 0$ のとき、 $f(x) > f(0) = 0$

したがって、$1 - x + \dfrac{x^2}{2} > e^{-x}$

(ii) $e^{-x} > 1 - x$ の証明

$g(x) = e^{-x} - 1 + x$ とおく。

$g'(x) = -e^{-x} + 1$

$x > 0$ のとき、$g'(x) > 0$
よって、 $g(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。
ゆえに、 $x > 0$ のとき、 $g(x) > g(0) = 0$
したがって、$e^{-x} > 1 - x$

(i) (ii) より $\quad 1 - x + \dfrac{x^2}{2} > e^{-x} > 1 - x \quad (x > 0)$

9, つぎの不等式が、付記の区間で成り立つことを証明せよ :

$$\tanh x < \arctan x < \frac{\pi}{2} \tanh x \quad (x > 0)$$

$x > 0$ においては、$\tanh x > 0$ かつ $\arctan x > 0$ であるから、

$1 < \dfrac{\arctan x}{\tanh x} < \dfrac{\pi}{2}$ を示せば良い。

$f(x) = \dfrac{\arctan x}{\tanh x}$ とおき、 $f'(x) > 0$ を示したい。

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{1+x^2} \cdot \tanh x - \arctan x \cdot \dfrac{1}{\cosh^2 x}}{\tanh^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{\cosh^2 x \cdot \tanh x}{\left(1+x^2\right)\arctan x} - 1}{\dfrac{\tanh^2 x \cdot \cosh^2 x}{\arctan x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sinh x \cosh x}{\left(1+x^2\right)\arctan x} - 1}{\dfrac{\sinh^2 x}{\arctan x}}$$

$$=\frac{\sinh x\cosh x-\left(1+x^2\right)\arctan x}{\left(1+x^2\right)\sinh^2 x}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sinh(2x)-\left(1+x^2\right)\arctan x}{\left(1+x^2\right)\sinh^2 x}$$

分母が正であることがわかったので、分子も正であることを示したい。

分子を $g(x)=\frac{1}{2}\sinh(2x)-\left(1+x^2\right)\arctan x$ とおく。

$$g'(x)=\cosh(2x)-\left\{2x\cdot\arctan x+\left(1+x^2\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\right\}$$

$$=\cosh(2x)-2x\cdot\arctan x-1$$

$$g''(x)=2\sinh(2x)-\left(2\cdot\arctan x+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=2\sinh(2x)-2\cdot\arctan x-\frac{2x}{1+x^2}$$

$$g'''(x)=2\cdot 2\cosh(2x)-\left\{2\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{2\cdot\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right\}$$

$$=4\cosh(2x)-\left\{2\cdot\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+2\cdot\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right\}$$

$$=4\cosh(2x)-\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\left\{\left(1+x^2\right)+\left(1-x^2\right)\right\}$$

$$=4\cosh(2x)-\frac{4}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=4\left\{\cosh(2x)-\left(1+x^2\right)^{-2}\right\}$$

$$g''''(x)=4\cdot\left\{2\sinh(2x)-(-2)\left(1+x^2\right)^{-3}\cdot 2x\right\}$$

$$=4\cdot\left\{2\sinh(2x)+\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^{-3}}\right\}$$

$$=8\cdot\left\{\sinh(2x)+\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^{-3}}\right\}$$

したがって、$x>0$ において、$g''''(x)>0$

$g''''(x)>0$ より、$x>0$ において、$g'''(x)>0$ は増加関数。

したがって、$x>0$ において、$g'''(x)>g'''(0)=0$

$g'''(x)>0$ より、$x>0$ において、$g''(x)$ は増加関数。

したがって、$x>0$ において、$g''(x)>g''(0)=0$

$g''(x)>0$ より、$x>0$ において、$g'(x)$ は増加関数。

したがって、$x>0$ において、$g'(x)>g'(0)=0$

$g'(x)>0$ より、$x>0$ において、$g(x)$ は増加関数。

したがって、$x>0$ において、$g(x)>g(0)=0$

よって、分子も正であることが示された。

すなわち、

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\sinh(2x)-\left(1+x^2\right)\arctan x}{\left(1+x^2\right)\sinh^2 x}=\frac{g(x)}{\left(1+x^2\right)\sinh^2 x}>0$$

$f'(x)>0$ より、$x>0$ において、$f(x)$ は増加関数。

これは、$f(x)$ は $x\to 0$ で下限となり、$x\to\infty$ で上限となることを意味している。

すなわち、

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)<f(x)<\lim_{x\to\infty} f(x)$$

下限は、分子分母ともに 0 へ近づくので、ロピタルの定理で求める。

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\arctan x}{\tanh x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}(\arctan x)}{\frac{d}{dx}(\tanh x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\left(\frac{1}{\cosh^2 x}\right)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}=\frac{1}{1}=1$$

上限は、式変形から以下のように求められる。

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\tanh x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1-0}{1+0}\right)}=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに、$1<\dfrac{\arctan x}{\tanh x}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すなわち、$\tanh x<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}\tanh x \quad (x>0)$

10,

(1)　0 位のベッセルの微分方程式：

$$xy'' + y' + xy = 0$$

からつぎの漸化式を導け：

$$xy^{(n+2)} + (n+1)y^{(n+1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0$$

ベッセルの微分方程式をライプニッツの定理を用いて n 回微分すると、

$$\frac{d^n}{dx^n}(xy'') + \frac{d^n}{dx^n}(y') + \frac{d^n}{dx^n}(xy) = 0$$

$$\left\{xy^{(n+2)} + n\cdot y^{(n+1)} + 0 + 0 + \cdots\right\} + y^{(n+1)} + \left\{xy^{(n)} + ny^{(n-1)} + 0 + 0 + \cdots\right\} = 0$$

$$xy^{(n+2)} + ny^{(n+1)} + y^{(n+1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0$$

$$\therefore\quad xy^{(n+2)} + (n+1)y^{(n+1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0$$

(2)　(1)の漸化式を利用して、0 位のベッセルの微分方程式の解 y で、$y(0) = 1$ をみたすもののマクローリン展開の x^6 の項までを求めよ。

0 位のベッセルの微分方程式に $x = 0$ を代入すると、$y'(0) = 0$

ベッセルの微分方程式に $x = 0$ を代入すると、$(n+1)y^{(n+1)}(0) + ny^{(n-1)}(0) = 0$

$$\therefore\quad y^{(n+1)}(0) = -\frac{n}{n+1}y^{(n-1)}(0)$$

(i)　n が偶数のとき

k を整数として、$n = 2k$ とおく。

$$\begin{aligned}
y^{(2k)}(0) &= -\frac{2k-1}{2k}y^{(2k-2)}(0) \\
&= -\frac{2k-1}{2k}\cdot\left(-\frac{2k-3}{2k-2}\right)y^{(2k-4)}(0) \\
&= -\frac{2k-1}{2k}\cdot\left(-\frac{2k-3}{2k-2}\right)\cdot\left(-\frac{2k-5}{2k-4}\right)y^{(2k-6)}(0)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$= -\frac{2k-1}{2k} \cdot \left(-\frac{2k-3}{2k-2}\right) \cdot \left(-\frac{2k-5}{2k-4}\right) \cdots\cdots \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y(0)$$

$$= -\frac{2k-1}{2k} \cdot \left(-\frac{2k-3}{2k-2}\right) \cdot \left(-\frac{2k-5}{2k-4}\right) \cdots\cdots \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

(ii)　n が奇数のとき

k を整数として、$n = 2k+1$ とおく。

$$y^{(2k+1)}(0) = -\frac{2k}{2k+1} y^{(2k-1)}(0)$$

$$= -\frac{2k}{2k+1} \cdot \left(-\frac{2k-2}{2k-1}\right) y^{(2k-3)}(0)$$

$$= -\frac{2k}{2k+1} \cdot \left(-\frac{2k-2}{2k-1}\right) \cdot \left(-\frac{2k-4}{2k-3}\right) y^{(2k-5)}(0)$$

$$\vdots$$

$$= -\frac{2k}{2k+1} \cdot \left(-\frac{2k-2}{2k-1}\right) \cdot \left(-\frac{2k-4}{2k-3}\right) \cdots\cdots \left(-\frac{6}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y'(0)$$

$$= 0$$

$(i)(ii)$ より、マクローリン展開をすると、

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k-1)!!}{(2k)! \cdot (2k)!!} x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{(2k)!!\}^2} x^{2k}$$

$$= \frac{(-1)^0}{(0!!)^2} x^0 + \frac{(-1)^1}{(2!!)^2} x^2 + \frac{(-1)^2}{(4!!)^2} x^4 + \frac{(-1)^3}{(6!!)^2} x^6 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{(2k)!!\}^2} x^{2k}$$

$$=1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4-\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}x^6+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\{(2k)!!\}^2}x^{2k}$$