

平成 23 年度 機械系の数学演習 I 第 4 回

問題

※ う p 主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしいところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)

明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

$$1, \quad f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \cdots (x-a_{n-1})(x-a_n) \quad (a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n)$$

とおけば、 $(n-1)$ 次の代数方程式: $f'(x)=0$ は、各区間 $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ に

1 個ずつ解を持つことをロールの定理を適用して証明せよ。

ロールの定理:

$f(x)$ は $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能で、

$$f(a) = f(b) = 0$$

と仮定すれば、

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。

<証明>

区間 (a_1, a_2) において、ロールの定理を適用すると、 $f(a_1) = f(a_2) = 0$ であるから、

$$f'(c_{12}) = 0 \quad (a_1 < c_{12} < a_2) \quad \text{を満たす } c_{12} \text{ が存在する。}$$

また、区間 (a_1, a_2) において、 $f(x) = 0$ をみたす x は存在しないから、

区間 (a_1, a_2) では、 $f'(x) = 0$ の解は c_{12} のみである。

区間 (a_2, a_3) において、ロールの定理を適用すると、 $f(a_2) = f(a_3) = 0$ であるから、

$$f'(c_{23}) = 0 \quad (a_2 < c_{23} < a_3) \quad \text{を満たす } c_{23} \text{ が存在する。}$$

また、区間 (a_2, a_3) において、 $f(x) = 0$ をみたす x は存在しないから、

区間 (a_2, a_3) では、 $f'(x) = 0$ の解は c_{23} のみである。

同様に、これを各区間 $(a_3, a_4), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ で適用すればよい。

2, つぎの $f(x)$ について、示された区間で、以下の平均値の定理を適用した場合の c の値を求めよ :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

平均値の定理 :

$f(x)$ は $[a, b]$ で連続で、 (a, b) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

をみたす c が存在する。

<証明>

$f(x)$ を微分すると、

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$f(x)$ について、示された区間で平均値の定理を適用すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1} = \frac{1}{2} \\ f'(c) = \frac{(1-c)(1+c)}{(1+c^2)^2} \end{array} \right. \quad \text{であるから、}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(1-c)(1+c)}{(1+c^2)^2} \quad (0 < c < 1) \quad \text{をみたす } c \text{ が存在する。}$$

$$(1+c^2)^2 = 2(1-c)(1+c) \quad \because \quad 0 < c < 1 \Rightarrow 1+c^2 \neq 0$$

$$1+2c^2+c^4 = 2-2c^2$$

$$c^4 + 4c^2 - 1 = 0$$

$$c^4 + 4c^2 + 4 = 5$$

$$(c^2 + 2)^2 = 5$$

$$c^2 + 2 = \pm\sqrt{5}$$

$$c^2 = -2 \pm \sqrt{5}$$

$c^2 > 0$ より、 $c^2 = -2 \pm \sqrt{5}$ は不適。

$$c^2 = -2 + \sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$$

※ この二重根号は外せない。

(参照)

二重根号のはずしかた

$$a > b > 0 \text{ のとき、} \begin{cases} \sqrt{(a+b) + \sqrt{2ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \sqrt{(a+b) - \sqrt{2ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \end{cases}$$

3,(1) $f(x) = x^3$ について、以下の平均値の定理 ($a > 0$ と仮定) を適用した場合の θ の値を求めよ。

平均値の定理：

$$f(x) \text{ は } [a, a+h] \text{ で連続で、} (a, a+h) \text{ で微分可能ならば、}$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

をみたす $\theta \in (0,1)$ が存在する。

(2) (1)で求めた θ について、 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ を求めよ。

(1)

$$f'(x) = 3x^2$$

$f(x)$ について、平均値の定理を適用すると、

$$\begin{cases} f(a+h) = (a+h)^3 \\ f(a) + hf'(a+\theta h) = a^3 + h \cdot 3(a+\theta h)^2 \end{cases} \quad \text{であるから、}$$

$(a+h)^3 = a^3 + h \cdot 3(a+\theta h)^2$ をみたす $\theta \in (0,1)$ が存在する。

$$a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 = a^3 + 3h(a^2 + 2a\theta h + \theta^2 h^2)$$

$$a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 = a^3 + 3a^2h + 6a\theta h^2 + 3\theta^2h^3$$

$$3ah^2 + h^3 = 6a\theta h^2 + 3\theta^2h^3$$

$0 < a < a+h$ であるから、 $h > 0$ が言える。両辺を $3h^3$ で割ると

$$\frac{a}{h} + \frac{1}{3} = \frac{2a\theta}{h} + \theta^2$$

$$\theta^2 + 2\frac{a}{h}\theta + \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}$$

$$\left(\theta + \frac{a}{h}\right)^2 = \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}$$

$$\theta + \frac{a}{h} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}}$$

$$\theta + \frac{a}{h} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}}$$

$\theta > 0$ か $a > 0$ か $h > 0$ より、 $\theta + \frac{a}{h} = -\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}}$ は不適。

$$\theta + \frac{a}{h} = \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}}$$

$$\theta = \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}} - \frac{a}{h}$$

(2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h} + \frac{1}{3}} - \frac{a}{h} \right)$$

$\frac{a}{h} = t$ とおくと、 $h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t^2 + t + \frac{1}{3}} - t \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{t^2 + t + \frac{1}{3}} - t \right) \left(\sqrt{t^2 + t + \frac{1}{3}} + t \right)}{\sqrt{t^2 + t + \frac{1}{3}} + t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(t^2 + t + \frac{1}{3} \right) - t^2}{\sqrt{t^2 + t + \frac{1}{3}} + t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \frac{1}{3}}{\sqrt{t^2 + t + \frac{1}{3}} + t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^2}} + 1} \\
&= \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4, つぎの不定形の極限值を求めよ :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{\pi}{2} \right) \sec x$$

(1)

<ロピタルの定理>

$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} (a^x - b^x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

<微分の定義式>

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - b^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^0}{x - 0} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - b^0}{x - 0}$$

$$f(x) = a^x, g(x) = b^x \text{ とおく。 } (f'(x) = a^x \log a, g'(x) = b^x \log b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f'(0) - g'(0) = \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

(2)

<置換・式変形>

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{\pi}{2} \right) \sec x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \text{ とおくと、 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{\pi}{2} \right) \sec x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(t + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2}}{\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(t + \frac{\pi}{2} \right) \cos t - \frac{\pi}{2}}{(-\sin t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} (1 - \cos t) - t \cos t}{\sin t} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\left(\frac{\sin t}{t} \right)} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos t)(1 - \cos t)}{(1 + \cos t) \sin t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\left(\frac{\sin t}{t} \right)} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{(1 + \cos t) \sin t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\left(\frac{\sin t}{t} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{(1 + \cos t) \sin t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\left(\frac{\sin t}{t} \right)} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 + \cos t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\left(\frac{\sin t}{t} \right)} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} - \frac{\cos 0}{1} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{0}{1 + 1} - \frac{1}{1} \\
&= -1
\end{aligned}$$

<ロピタルの定理>

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{\pi}{2} \right) \sec x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{\pi}{2} \right) \sec x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx} \left(x \sin x - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{d}{dx} \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + x \cos x}{(-\sin x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{x \cos x}{\sin x} \right)$$

$$= -1 - \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$= -1 - \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 0}{1}$$

$$= -1$$

5, つぎの不定形の極限値を求めよ :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2)}{x \sin x}$$

(1)

<ロピタルの定理>

$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cosh x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin 2x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sinh x)}{\frac{d}{dx}(\sin 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

(2)

<ロピタルの定理>

$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \{ \log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2) \}}{\frac{d}{dx}(x \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1+2x}{1+x+x^2} + \frac{-1+2x}{1-x+x^2} \right)}{\sin x + x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1-x+x^2) + (-1+2x)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)(\sin x + x \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x+x^2) + 2x(1-x+x^2) - (1+x+x^2) + 2x(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)(\sin x + x \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2x(2+2x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)(\sin x + x \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 4x^3}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)(\sin x + x \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 4x^2}{(1+x+x^2)(1-x+x^2) \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \right)} \\
&= \frac{2+0}{(1+0+0)(1-0+0)(1+1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

6, つぎの不定形の極限値を求めよ :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a, b > 0)$$

(1)

$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log x}$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を考える。

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\text{分母}) = \infty$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \log x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)}{1} = 0$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2}}$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$ を考える。

$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \{ \log(a^x + b^x) - \log 2 \}}{\frac{d}{dx} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \right)}{1} \\ &= \frac{\left(\frac{\log a + \log b}{1+1} \right)}{1} \\ &= \frac{1}{2} (\log a + \log b) \\ &= \frac{1}{2} \log(ab) \end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log(ab)} = e^{\log \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

7, つぎの不定形の極限值を求めよ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}}$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{\sin x}{x}}{x^2}$ を考える。

$\lim_{x \rightarrow 0}(\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0}(\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\log \sin x - \log x)}{\frac{d}{dx} x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0}(\text{分子}) = \lim_{x \rightarrow 0}(\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(x \cos x - \sin x)}{\frac{d}{dx}(x^2 \sin x)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} \right)}{2 \left(\frac{\sin x}{x} \right) + \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+1} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

8, $a_k > 0$ ($k=1,2,3,\dots,n$)のとき、つぎの極限値を求めよ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + \dots + a_{n-1}^x + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

数列 a_n が最大値 $a_{n \max}$ を取るときの n を $n \max$ とおくことにする。

$$\left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}}$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(a_1^x + \dots + a_n^x) - \log n}{x}$ を考える。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(a_1^x + \dots + a_n^x) - \log n}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(a_1^x + \dots + a_n^x) - x \log a_{n \max} + x \log a_{n \max} - \log n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{a_{n \max}^x} + x \log a_{n \max} - \log n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left\{ \left(\frac{a_1}{a_{n \max}} \right)^x + \dots + \left(\frac{a_n}{a_{n \max}} \right)^x \right\} + x \log a_{n \max} - \log n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \log \left\{ \left(\frac{a_1}{a_{n \max}} \right)^x + \dots + \left(\frac{a_n}{a_{n \max}} \right)^x \right\} + \log a_{n \max} - \frac{\log n}{x} \right] \\ &= 0 \cdot \log(0 + \dots + 1 + \dots + 0) + \log a_{n \max} - 0 \\ &= \log a_{n \max} \end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \log \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}} = e^{\log a_{n \max}} = a_{n \max}$$

9, つぎの関数は、 $x=0$ で連続であるか。また、微分可能であるか。:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \cdots (x \neq 0) \\ 0 & \cdots (x = 0) \end{cases}$$

$x=0$ で連続かどうか確かめるため、最大値 $x=0$ を付近における左極限と右極限を計算する

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0 \text{ であるから、} x=0 \text{ で連続。}$$

次に、 $x=0$ において微分可能であるか判定するために、 $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ の存在を調べる。

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h-0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

$$\frac{1}{h^2} = t \text{ とおくと、} h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty$$

※ $\frac{1}{h} = t$ とおくと、 $h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \pm\infty$ であるから場合分けが必要になり、面倒となる。

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} (\text{分子}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{分母}) = \infty$ より、ロピタルの定理を用いると

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{t}}{\frac{d}{dt} e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{t} e^t} = 0$$

$f'(0) = 0$ と一定値に収束するため、 $x=0$ で微分可能。

10, $a \neq b$ のとき

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n=0$$

の解は、すべて a と b での間にあつて、たがいに異なることをロールの定理を適用して証明せよ。

<証明>

k を $0 \leq k \leq n$ をみたす整数として、 $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}(x-a)^n(x-b)^n$ とおく。

ライプニッツの公式を用いると、

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \left[{}_k C_i \left\{ \frac{d^i}{dx^i}(x-a)^n \right\} \left\{ \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}(x-b)^n \right\} \right] \text{とおける。}$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= {}_k C_0 (x-a)^n \left\{ \frac{d^k}{dx^k}(x-b)^n \right\} \\ &\quad + {}_k C_1 \left\{ \frac{d}{dx}(x-a)^n \right\} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x-b)^n \right\} \\ &\quad + {}_k C_2 \left\{ \frac{d^2}{dx^2}(x-a)^n \right\} \left\{ \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(x-b)^n \right\} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + {}_k C_{k-1} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x-a)^n \right\} \left\{ \frac{d}{dx}(x-b)^n \right\} \\ &\quad + {}_k C_k \left\{ \frac{d^k}{dx^k}(x-a)^n \right\} (x-b)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= {}_k C_0 (x-a)^n \left\{ {}_n P_k (x-b)^{n-k} \right\} \\ &\quad + {}_k C_1 \left\{ {}_n P_1 (x-a)^{n-1} \right\} \left\{ {}_n P_{k-1} (x-b)^{n-(k-1)} \right\} \\ &\quad + {}_k C_2 \left\{ {}_n P_2 (x-a)^{n-2} \right\} \left\{ {}_n P_{k-2} (x-b)^{n-(k-2)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& + {}_k C_{k-1} \left\{ {}_n P_{k-1} (x-a)^{n-k} \right\} \left\{ {}_n P_1 (x-b)^{n-1} \right\} \\
& + {}_k C_k \left\{ {}_n P_k (x-a)^{n-k} \right\} (x-b)^n \\
f^{(k)}(x) &= {}_k C_0 \cdot {}_n P_k \cdot (x-a)^n (x-b)^{n-k} \\
& + {}_k C_1 \cdot {}_n P_1 \cdot {}_n P_{k-1} \cdot (x-a)^{n-1} (x-b)^{n-(k-1)} \\
& + {}_k C_2 \cdot {}_n P_2 \cdot {}_n P_{k-2} \cdot (x-a)^{n-2} (x-b)^{n-(k-2)} \\
& \vdots \\
& + {}_k C_{k-1} \cdot {}_n P_{k-1} \cdot {}_n P_1 \cdot (x-a)^{n-(k-1)} (x-b)^{n-1} \\
& + {}_k C_k \cdot {}_n P_k \cdot (x-a)^{n-k} (x-b)^n \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^k \left\{ {}_k C_i \cdot {}_n P_i \cdot {}_n P_{k-i} \cdot (x-a)^{n-i} (x-b)^{n-(k-i)} \right\} \\
f^{(k)}(x) &= (x-a)^{n-k} (x-b)^{n-k} \cdot \sum_{i=0}^k \left\{ {}_k C_i \cdot {}_n P_i \cdot {}_n P_{k-i} \cdot (x-a)^{k-i} (x-b)^i \right\}
\end{aligned}$$

これより、 $0 \leq k \leq n-1$ の範囲で、 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ である。

ここで、 $g_k(x) = \sum_{i=0}^k \left\{ {}_k C_i \cdot {}_n P_i \cdot {}_n P_{k-i} \cdot (x-a)^{k-i} (x-b)^i \right\}$ とおくことにする。

すなわち、

$$f^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k} (x-b)^{n-k} \cdot g_k(x)$$

$f^{(k)}(x)$ は $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能、 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ であるから、

ロールの定理より、

$$f^{(k+1)}(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。

・・・(*)

$k=0$ のとき、解は $x=a$ 、 $x=b$ で互いに異なり、

$k=1$ のとき、解は $x=a$ 、 $x=b$ と $g_1(x)=0$ の解となるが、(*)より、 $g_1(x)=0$ の解を c_1 とおくと、 $a < c_1 < b$ より、互いに異なる。

$k=2$ のとき、解は $x=a$ 、 $x=b$ と $g_2(x)=0$ の解となるが、(*)より、 $g_2(x)=0$ の解を c_{21}, c_{22} とおくと、 $a < c_{21} < c_1$ 、 $c_1 < c_{22} < b$ より、互いに異なる。

同様にこれを繰り返すと、 $k=n$ のときもすべての解がすべて a と b での間にあつて、たがいに異なることがわかる。

つまり、これは $\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n=0$ の解は、すべて a と b での間にあつて、たがいに異なることに他ならない。