

平成 23 年度 機械系の数学演習 I 第 3 回

問題

※ う p 主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしいところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)

明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1, つぎの関数の n 階導関数を求めよ :

$$\log|1+x|$$

$f(x) = \log|1+x|$ とおく。

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \{(1+x)^{-1}\} = (-1)(1+x)^{-2} \frac{d}{dx}(1+x) = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx} \{(1+x)^{-2}\} = (-1)(-2)(1+x)^{-3} \frac{d}{dx}(1+x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} \{(1+x)^{-3}\} = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} \frac{d}{dx}(1+x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad \cdot \cdot \cdot (*)$$

と推測する。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$f'(x) = (-1)^{1+1}(1-1)!(1+x)^{-1} = (-1)^2 \cdot 0!(1+x)^{-1} = (1+x)^{-1}$$

したがって、 $n=1$ のとき(*)は成立する。

[2] $n=k$ のときの(*)の成立を仮定した上で、 $n=k+1$ のときも(*)が成立するか検証する。

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \{(-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1} (k-1)! \cdot \frac{d}{dx} \{(1+x)^{-k}\} \\
&= (-1)^{k+1} (k-1)! \cdot \frac{d}{dx} \{(1+x)^{-k}\} \\
&= (-1)^{k+1} (k-1)! \cdot \left\{ (-k) \cdot (1+x)^{-(k+1)} \cdot \frac{d}{dx} (1+x) \right\} \\
&= (-1)^{(k+1)+1} \cdot \{(k+1)-1\}! \cdot (1+x)^{-(k+1)}
\end{aligned}$$

したがって、 $n=k+1$ のときも成立する。

[1][2]より、すべての自然数において、(*)は成り立つ。

$$\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

2, つぎの関数の n 階導関数を求めよ :

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)}$$

$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$ とおく。これを部分分数展開すると、

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-1}{(x-2)(x-1)} - \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

つまり、 $f(x) = (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1}$ であるから、

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} \{(x-2)^{-1}\} - \frac{d}{dx} \{(x-1)^{-1}\} \\
&= (-1)(x-2)^{-2} \frac{d}{dx} (x-2) - (-1)(x-1)^{-2} \frac{d}{dx} (x-1) \\
&= (-1)(x-2)^{-2} - (-1)(x-1)^{-2} \\
f''(x) &= \frac{d}{dx} \{(-1)(x-2)^{-2}\} - \frac{d}{dx} \{(-1)(x-1)^{-2}\} \\
&= (-1)(-2)(x-2)^{-3} \frac{d}{dx} (x-2) - (-1)(-2)(x-1)^{-3} \frac{d}{dx} (x-1) \\
&= (-1)(-2)(x-2)^{-3} - (-1)(-2)(x-1)^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx} \{(-1)(-2)(x-2)^{-3}\} - \frac{d}{dx} \{(-1)(-2)(x-1)^{-3}\} \\
&= (-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4} \frac{d}{dx}(x-2) - (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} \frac{d}{dx}(x-1) \\
&= (-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4} - (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n \cdot n! \cdot (x-2)^{-(n+1)} - (-1)^n \cdot n! \cdot (x-1)^{-(n+1)} \\
&= (-1)^n \cdot n! \cdot \{(x-2)^{-(n+1)} - (x-1)^{-(n+1)}\} \quad \cdot \cdot \cdot (*)
\end{aligned}$$

と推測する。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-1)^1 \cdot 1! \cdot \{(x-2)^{-2} - (x-1)^{-2}\} \\
&= (-1) \cdot 1! \cdot \{(x-2)^{-2} - (x-1)^{-2}\} \\
&= (-1)(x-2)^{-2} - (-1)(x-1)^{-2}
\end{aligned}$$

したがって、 $n=1$ のとき(*)は成立する。

[2] $n=k$ のときの(*)の成立を仮定した上で、 $n=k+1$ のときも(*)が成立するか検証する。

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \\
&= \frac{d}{dx} \left[(-1)^k \cdot k! \cdot \{(x-2)^{-(k+1)} - (x-1)^{-(k+1)}\} \right] \\
&= (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{d}{dx} \{(x-2)^{-(k+1)} - (x-1)^{-(k+1)}\} \\
&= (-1)^k \cdot k! \cdot \left[-(k+1)(x-2)^{-\{(k+1)+1\}} \frac{d}{dx}(x-2) - \{-(k+1)\}(x-1)^{-\{(k+1)+1\}} \frac{d}{dx}(x-1) \right] \\
&= (-1)^k \cdot k! \cdot \{-(k+1)\} \left[(x-2)^{-\{(k+1)+1\}} - (x-1)^{-\{(k+1)+1\}} \right] \\
&= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \left[(x-2)^{-\{(k+1)+1\}} - (x-1)^{-\{(k+1)+1\}} \right]
\end{aligned}$$

したがって、 $n=k+1$ のときも成立する。

[1][2] より、すべての自然数において、(*)は成り立つ。

$$\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \{(x-2)^{-(n+1)} - (x-1)^{-(n+1)}\}$$

3, つぎの関数の n 階導関数を求めよ :

$$e^x \sin x$$

$f(x) = e^x \sin x$ とおく。

$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx} e^x \right) \sin x + e^x \left(\frac{d}{dx} \sin x \right)$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$= e^x (\sin x + \cos x)$$

$$= e^x \left\{ \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right)$$

$$f''(x) = \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{d}{dx} e^x \right) \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) + e^x \frac{d}{dx} \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} \left\{ e^x \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) + e^x \cos \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \left\{ \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) + \cos \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \sqrt{2} \sin \left\{ \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) + \frac{1}{4} \pi \right\}$$

$$= 2 e^x \sin \left(x + \frac{1}{2} \pi \right)$$

$$= (\sqrt{2})^2 e^x \sin \left\{ x + 2 \left(\frac{1}{4} \pi \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
f^{(3)}(x) &= 2 \left\{ \left(\frac{d}{dx} e^x \right) \sin \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) + e^x \frac{d}{dx} \sin \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) \right\} \\
&= 2 \left\{ e^x \sin \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) + e^x \cos \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) \right\} \\
&= 2e^x \left\{ \sin \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) + \cos \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) \right\} \\
&= 2e^x \sqrt{2} \sin \left\{ \left(x + \frac{1}{2} \pi \right) + \frac{1}{4} \pi \right\} \\
&= 2\sqrt{2}e^x \sin \left(x + \frac{3}{4} \pi \right) \\
&= (\sqrt{2})^3 e^x \sin \left\{ x + 3 \left(\frac{1}{4} \pi \right) \right\}
\end{aligned}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right) \quad \cdot \cdot \cdot (*)$$

と推測する。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$f'(x) = (\sqrt{2})^1 e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

したがって、 $n=1$ のとき(*)は成立する。

[2] $n=k$ のときの(*)の成立を仮定した上で、 $n=k+1$ のときも(*)が成立するか検証する。

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \\
&= \frac{d}{dx} \left\{ (\sqrt{2})^k e^x \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\} \\
&= (\sqrt{2})^k \frac{d}{dx} \left\{ e^x \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\} \\
&= (\sqrt{2})^k \left\{ \left(\frac{d}{dx} e^x \right) \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) + e^x \frac{d}{dx} \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\} \\
&= (\sqrt{2})^k \left\{ e^x \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) + e^x \cos \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{2})^k e^x \left\{ \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\} \\
&= (\sqrt{2})^k e^x \sqrt{2} \sin \left\{ \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \right\} \\
&= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin \left\{ x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right\}
\end{aligned}$$

したがって、 $n=k+1$ のときも成立する。

[1][2]より、すべての自然数において、(*)は成り立つ。

$$\therefore f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right)$$

4, つぎの関数のパラメータ表示から、 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ を求めよ :

サイクロイド: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (a は正の定数)

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = a \cos t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)} \right\}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) - \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \right\}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \\
&= \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) - \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3} \\
&= \frac{(a \cos t) \cdot \{a(1 - \cos t)\} - (a \sin t) \cdot (a \sin t)}{\{a(1 - \cos t)\}^3} \\
&= \frac{(a \cos t) \cdot (a - a \cos t) - (a \sin t) \cdot (a \sin t)}{\{a(1 - \cos t)\}^3} \\
&= \frac{(a^2 \cos t - a^2 \cos^2 t) - (a^2 \sin^2 t)}{\{a(1 - \cos t)\}^3} \\
&= \frac{-a^2(-\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{a^3(1 - \cos t)^3} \\
&= \frac{-a^2(1 - \cos t)}{a^3(1 - \cos t)^3} \\
&= -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}
\end{aligned}$$

5, つぎの等式を証明せよ :

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

この等式は $n=0$ でも成立するが、以下、 n は自然数であるとして数学的帰納法で証明する。

$$f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) \text{ とおく。}$$

[1] $n=1$ のとき

$$f_1(x) = \frac{d}{dx} \left(x^{1-1} e^{\frac{1}{x}} \right) = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = (-1)^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{1+1}}$$

したがって、 $n=1$ のとき(*)は成立する。

[2] $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{d}{dx} x \right) e^{\frac{1}{x}} + x \left(\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} \right) \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ e^{\frac{1}{x}} + x \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) + e^{\frac{1}{x}} \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) + \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \\ &= (-1)^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2+1}} \end{aligned}$$

したがって、 $n=2$ のとき(*)は成立する。

[3] $n=k, n=k+1$ のときの(*)の成立を仮定した上で、 $n=k+2$ のときも(*)が成立するか検証する。

$$\begin{aligned}
f_{k+2}(x) &= \frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}} \left(x^{k+1} e^{\frac{1}{x}} \right) \\
&= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left\{ \frac{d}{dx} \left(x^{k+1} e^{\frac{1}{x}} \right) \right\} \\
&= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left\{ \left(\frac{d}{dx} x^{k+1} \right) e^{\frac{1}{x}} + x^{k+1} \left(\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} \right) \right\} \\
&= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left\{ (k+1)x^k e^{\frac{1}{x}} + x^{k+1} \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \right\} \\
&= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left\{ (k+1)x^k e^{\frac{1}{x}} - x^{k-1} e^{\frac{1}{x}} \right\} \\
&= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left\{ (k+1)x^k e^{\frac{1}{x}} \right\} - \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left\{ x^{k-1} e^{\frac{1}{x}} \right\} \\
&= (k+1) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(x^k e^{\frac{1}{x}} \right) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}} \right) \right\} \\
&= (k+1)(-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} - \frac{d}{dx} \left\{ (-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}} \right\} \\
&= (k+1)(-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} - (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} \right) (x^{k+1}) - e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{d}{dx} x^{k+1} \right)}{(x^{k+1})^2} \\
&= (k+1)(-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) (x^{k+1}) - (k+1) e^{\frac{1}{x}} x^k}{x^{k+1} \cdot x^{k+1}} \\
&= (k+1)(-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} \left\{ \left(-\frac{1}{x^2} \right) (x^{k+1}) - (k+1) x^k \right\}}{x^{k+1} \cdot x^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k+1)(-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} - (-1)^{k+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} \{x^{k-1} + (k+1)x^k\}}{x^{k+2} \cdot x^k} \\
&= (k+1)(-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} - (-1)^{k+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} \cdot \frac{x^{k-1} + (k+1)x^k}{x^k} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} \left\{ (k+1) - \frac{x^{k-1} + (k+1)x^k}{x^k} \right\} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} \left\{ (k+1) - \frac{1}{x} - (k+1) \right\} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} \left(-\frac{1}{x} \right) \\
&= (-1)^{k+2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{(k+2)+1}}
\end{aligned}$$

したがって、 $n = k + 2$ のときも成立する。

[1][2]より、すべての自然数において、(*)は成り立つ。

6, つぎの関数は、それにつづく微分方程式をみたすことを証明せよ (m は定数) :

$$y = \sin(\operatorname{arcsin} x) \quad , \quad (1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$$

$$y' = \cos(\operatorname{arcsin} x) \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsin} x)$$

$$= \cos(\operatorname{arcsin} x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \left\{ \frac{d}{dx} \cos(\operatorname{arcsin} x) \right\} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(\operatorname{arcsin} x) \cdot \frac{d}{dx} \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \{-\sin(m \arcsin x)\} \cdot \left(\frac{d}{dx} m \arcsin x \right) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(m \arcsin x) \cdot \frac{-m \left(\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \right)}{1-x^2} \\
&= (-y) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(m \arcsin x) \cdot \frac{\left(\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{1-x^2} \\
&= -\frac{m^2 y}{1-x^2} + \frac{m \cos(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{1-x^2} \\
&= -\frac{m^2 y}{1-x^2} + y' \cdot \frac{x}{1-x^2}
\end{aligned}$$

これを式変形すると、

$$y'' = -\frac{m^2 y}{1-x^2} + y' \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

$$(1-x^2)y'' = -m^2 y + xy'$$

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$$

7, ライプニッツの公式を用いて、つぎの関数の n 階導関数を求めよ (a は定数) :

$$x^2 \sin ax$$

$$f(x) = x^2, g(x) = \sin ax \text{ とおくと、}$$

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f'''(x) = 0 \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 3),$$

$$g^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

である。(証明略)

ライプニッツの公式より、

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \left\{ {}_n C_k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= {}_nC_0 \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n)} + {}_nC_1 \cdot f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + \cdots + {}_nC_n \cdot f^{(n)} \cdot g^{(0)} \\
&= {}_nC_0 \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n)} + {}_nC_1 \cdot f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + {}_nC_2 \cdot f^{(2)} \cdot g^{(n-2)} + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= x^2 a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nxa^{n-1} \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)a^{n-2} \sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right)
\end{aligned}$$

8, ライプニッツの公式を用いて、つぎの関数の n 階導関数を求めよ :

$$x^2 e^{3x}$$

$$f(x) = x^2, g(x) = e^{3x} \text{ とおくと、}$$

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f'''(x) = 0 \quad \cdots \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 3),$$

$$g^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$$

である。(証明略)

ライプニッツの定理より、

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) &= \sum_{k=0}^n \left\{ {}_nC_k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \right\} \\
&= {}_nC_0 \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n)} + {}_nC_1 \cdot f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + \cdots + {}_nC_n \cdot f^{(n)} \cdot g^{(0)} \\
&= {}_nC_0 \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n)} + {}_nC_1 \cdot f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + {}_nC_2 \cdot f^{(2)} \cdot g^{(n-2)} + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= x^2 \cdot 3^n e^{3x} + n \cdot (2x) \cdot 3^{n-1} e^{3x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 3^{n-2} e^{3x} \\
&= (9x^2) \cdot (3^{n-2} e^{3x}) + (6nx) \cdot (3^{n-2} e^{3x}) + n(n-1) \cdot (3^{n-2} e^{3x}) \\
&= \{9x^2 + 6nx + n(n-1)\} \cdot (3^{n-2} e^{3x}) \\
&= \{9x^2 + 6nx + n(n-1)\} \cdot (3^{n-2} e^{3x}) \\
&= (9x^2 + 6nx + n^2 - n) \cdot (3^{n-2} e^{3x}) \\
&= \{(3x+n)^2 - n\} \cdot (3^{n-2} e^{3x})
\end{aligned}$$

9, つぎの関数に対して、それにつづく漸化式が成り立つことを証明し、その漸化式を利用

して、 $y^n(0)$ を求めよ($n=0,1,2,3,\dots$)。:

$$y = \arcsin x, \quad (1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + n^2y^{(n)} = 0$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)(y')^2 = 1 \quad \dots (*)$$

(*)の両辺を微分すると、

$$\left\{ \frac{d}{dx}(1-x^2) \right\} (y')^2 + (1-x^2) \left\{ \frac{d}{dx} (y')^2 \right\} = 0$$

$$(-2x)(y')^2 + (1-x^2)(2y''y') = 0$$

$$2y' \{ -xy' + (1-x^2)y'' \} = 0$$

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0 \quad \because y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$$

$$(1-x^2)y'' = xy' \quad \dots (**)$$

ライプニッツの公式を用いて、(**)の両辺を n 回微分すると、

$${}_nC_0(1-x^2)y^{(n+2)} + {}_nC_1(1-x^2)^{(1)}y^{(n+1)} + {}_nC_2(1-x^2)^{(2)}y^{(n)} = {}_nC_0xy^{(n+1)} + {}_nC_1x^{(1)}y^{(n)}$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} + n(-2x)y^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

これに $x=0$ を代入すると、

$$y^{(n+2)}(0) - n^2y^{(n)}(0) = 0$$

$$y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$$

ここで、数列 a_n を $a_n = y^{(n)}(0)$ と定義すると、

$$a_{n+2} = n^2a_n \quad \dots (***)$$

(i) n が偶数のとき、 $a_0 = y(0) = \arcsin 0 = 0$ $a_2 = 0^2 a_0 = 0$ $a_4 = 2^2 a_2 = 0$ $a_6 = 4^2 a_4 = 0$ $a_8 = 6^2 a_6 = 0$	(ii) n が奇数のとき、 $a_1 = y'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$ $a_3 = 1^2 a_1 = 1^2$ $a_5 = 3^2 a_3 = 3^2 1^2$ $a_7 = 5^2 a_5 = 5^2 3^2 1^2$ $a_9 = 7^2 a_7 = 7^2 5^2 3^2 1^2$
--	---

これより、

(i) n が偶数のとき、 $y^{(n)}(0) = 0$

(ii) n が奇数のとき、 $y^{(n)}(0) = \{(n-2)!!\}^2$

※ (ii) に出てくる!! という記号は『一つおきに階乗を取る』という意味です。

たとえば、 $10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, $11!! = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ のように使います。

滅多に使わないので、覚える必要はないんじゃないかなー。

10、 つぎの微分方程式を、付記の変換によって、独立変数 t の微分方程式に変換せよ。:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad , \quad x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = \sin t \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right)}{\cos t} = \frac{\left(\sin t \cdot \frac{dy}{dt}\right) + \left(\cos t \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right)}{\cos^3 t} \right\}$$

$$\Rightarrow (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = \cos^2 t \cdot \frac{\left(\sin t \cdot \frac{dy}{dt}\right) + \left(\cos t \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right)}{\cos^3 t} = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = \left(\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2}\right) - \left(\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) + y = \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$