平成 23 年度　機械系の数学演習 I　 第 1 回

問題

※　う p 主が手計算で解いたものです。どうせ間違いだらけだろうと思いますが、おかしなところがあれば、各自で修正してくださいな(´・ω・`)
明らかな間違いを発見された方は、wiki のコメント欄に書き込んでくだされば、皆さんのためになると思いますので、是非そうしてください。

1,　つぎの極限値を求めよ （n は自然数、a は定数）:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

<置換・二項級数展開>

$x - a = h$ とおくと、$x \to a$ のとき $h \to 0$ であるから

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \left({}_nC_k a^{n-k} h^k \right) - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left({}_nC_0 a^n h^0 + {}_nC_1 a^{n-1} h^1 + {}_nC_2 a^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a^1 h^{n-1} + {}_nC_n a^0 h^n \right) - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(a^n + {}_nC_1 a^{n-1} h + {}_nC_2 a^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a h^{n-1} + h^n \right) - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{{}_nC_1 a^{n-1} h + {}_nC_2 a^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a h^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left({}_nC_1 a^{n-1} + {}_nC_2 a^{n-2} h^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} a h^{n-2} + h^{n-1} \right)$$

$$= {}_nC_1 a^{n-1}$$

$$= n a^{n-1}$$

<因数分解>

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^k x^{n-k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^k a^{n-k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}a^n$$

$$=a^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}1$$

$$=na^{n-1}$$

<ロピタルの定理>

$\lim_{x\to a}(\text{分子})=\lim_{x\to a}(\text{分母})=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\quad=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^n-a^n\right)}{\frac{d}{dx}(x-a)}\quad=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}\quad=na^{n-1}$$

<微分の定義式>

$f(x)=x^n$ とおく。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\quad=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad=f'(a)\quad=na^{n-1}$$

2, つぎの極限値を求めよ：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

<分子の有理化>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$=1$$

<ロピタルの定理>

$\lim_{x\to 0}(分子)=\lim_{x\to 0}(分母)=0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{\frac{d}{dx}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{1+0}}+\frac{1}{2\sqrt{1-0}}\right)$$

$$=1$$

3, つぎの極限値を求めよ (a,b は定数):

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$$

$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{x^2+(a+b)x+ab\right\}-\left\{x^2-(a+b)x+ab\right\}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)+\left(1+\frac{b}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{a}{x}\right)+\left(1-\frac{b}{x}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(a+b)x}{x\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)+\left(1+\frac{b}{x}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)+\left(1-\frac{b}{x}\right)}\right\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(a+b)}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)+\left(1+\frac{b}{x}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)+\left(1-\frac{b}{x}\right)}}$$

$$=\frac{2(a+b)}{\sqrt{(1+0)(1+0)}+\sqrt{(1-0)(1-0)}}$$

$$=\frac{2(a+b)}{2}$$

$$=a+b$$

4,　つぎの極限値を求めよ （a,b は定数）:

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right\}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right\}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right\}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right\}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left\{x^2+(a+b)x+2ab\right\}-x^2}{-x\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}-x} \qquad \because \quad x\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=|x|=-x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(a+b)x-2ab}{x\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1\right\}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(a+b)-\frac{2ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1}$$

$$=\frac{-(a+b)-0}{\sqrt{(1+0)(1+0)}+1}$$

$$=-\frac{a+b}{2}$$

5, つぎの極限値を求めよ （$ab\neq 0$）:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$$

< 公式：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる方法>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} \quad =\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{ax}{bx}\right) \quad =\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\right) \quad =\frac{a}{b}$$

<ロピタルの定理>

$\lim_{x\to 0}(\text{分子}) = \lim_{x\to 0}(\text{分母}) = 0$ より、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} \quad = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\sin ax}{\frac{d}{dx}\sin bx} \quad = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx} \quad = \frac{a}{b}$$

6,　つぎの極限値を求めよ：

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

$\frac{1}{x} = t$ とおくと、$x \to +0$ のとき $t \to +\infty$ であるから

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} \quad = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{e^t + e^{-t}} \quad = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+e^{-2t}} \quad = \frac{1}{1+0} \quad = 1$$

7,　つぎの極限値を求めよ：

$$\lim_{x\to +0}\sin\frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} = t$ とおくと、$x \to +0$ のとき $t \to +\infty$ であるから

$$\lim_{x\to +0}\sin\frac{1}{x} \quad = \lim_{t\to\infty}\sin t$$

正弦曲線に極限はないので、<u>極限値なし</u>。

8,　つぎの関数は、$x = 0$ で連続であるか：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \cdots(x\neq 0)\\ 0 & \cdots(x=0)\end{cases}$$

$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと、$x\to -0$ のとき $t\to -\infty$ で $x\to +0$ のとき $t\to +\infty$ であるから

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{t\to -\infty}\dfrac{1}{1+e^t}=\dfrac{1}{1+0}=1\\ \lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{1}{1+e^t}=\dfrac{1}{1+\infty}=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)\neq f(0)$ より、$x=0$ で不連続。

9,　つぎの関数は、$x=0$ で連続であるか。また、微分可能であるか。:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \cdots(x\neq 0)\\ 0 & \cdots(x=0)\end{cases}$$

$x=0$ で連続であるか判定するために、以下、はさみうちの定理を用いて $x=0$ 付近の極限を求める。

(i)　$\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ について

$$-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$$

$$x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq -x$$

$\lim\limits_{x\to -0}$ 左辺 $=\lim\limits_{x\to -0}$ 右辺 $=0$ より、　$\lim\limits_{x\to -0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

(ii)　$\lim\limits_{x\to +0} f(x)$ について

$$-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$$

$$-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$$

$\lim_{x\to+0}$ 左辺 $=\lim_{x\to+0}$ 右辺 $=0$ より、　$\lim_{x\to+0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$(i),(ii)$ より、$\lim_{x\to-0} f(x)=f(0)=\lim_{x\to+0} f(x)=0$ であるから、$x=0$ で連続。

次に、$x=0$ において微分可能であるか判定するために、$x=0$ における微分係数 $f'(0)$ の存在を調べる。

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0}\quad=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\quad=\lim_{h\to0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}\quad=\lim_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$$

$f'(0)$ となる値が存在しないので、微分不可能。

10,　つぎの関数は、$x=0$ で連続であるか。また、微分可能であるか。:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \cdots(x\neq0) \\ 0 & \cdots(x=0) \end{cases}$$

$x=0$ で連続であるか判定するために、以下、はさみうちの定理を用いて $x=0$ 付近の極限を求める。

(i)　左極限 $\lim_{x\to-0} f(x)$ について

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le1$$

$$x^3\le x^3\sin\frac{1}{x}\le -x^3$$

$\lim_{x\to-0}$ 左辺 $=\lim_{x\to-0}$ 右辺 $=0$ より、　$\lim_{x\to-0} x^3\sin\frac{1}{x}=0$

(ii)　右極限 $\lim_{x\to+0} f(x)$ について

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le1$$

$$-x^3\le x^3\sin\frac{1}{x}\le x^3$$

$\lim_{x\to+0}$ 左辺 $= \lim_{x\to+0}$ 右辺 $=0$ より、　$\lim_{x\to+0} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0$

$(i),(ii)$ より、$\lim_{x\to-0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to+0} f(x) = 0$ であるから、$x=0$ で連続。

次に、$x=0$ において微分可能であるか判定するために、$x=0$ における微分係数 $f'(0)$ の存在を調べる。

$$f'(0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0} \quad = \lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \quad = \lim_{h\to0}\frac{h^3\sin\frac{1}{h^3}-0}{h} \quad = \lim_{h\to0} h^2\sin\frac{1}{h^3}$$

(i)　左極限 $\lim_{h\to-0} h^2\sin\frac{1}{h^3}$ について

$$-1 \le \sin\frac{1}{h^3} \le 1$$

$$h^2 \le h^2\sin\frac{1}{h^3} \le -h^2$$

$\lim_{h\to-0}$ 左辺 $= \lim_{h\to-0}$ 右辺 $=0$ より、　$\lim_{h\to-0} h^2\sin\frac{1}{h^3} = 0$

(ii)　右極限 $\lim_{h\to+0} h^2\sin\frac{1}{h^3}$ について

$$-1 \le \sin\frac{1}{h^3} \le 1$$

$$-h^2 \le h^2\sin\frac{1}{h^3} \le h^2$$

$\lim_{h\to+0}$ 左辺 $= \lim_{h\to+0}$ 右辺 $=0$ より、　$\lim_{h\to+0} h^2\sin\frac{1}{h^3} = 0$

$(i),(ii)$ より、$f'(0) = \lim_{h\to0} h^2\sin\frac{1}{h^3} = 0$ と一定値に収束するため、$x=0$ で微分可能。