

[5]

$$(1) f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \dots \dots \dots \textcircled{1} \quad (0 < \theta < 1)$$

平均値の定理より

* (θ と h は関係ない)

$$f'(a+\theta h) = f'(a) + \theta h f''(a+\theta\theta h) \dots \dots \textcircled{2} \quad (0 < \theta < 1)$$

②を①に代入して

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \theta h^2 f''(a+\theta\theta h) \dots \dots \textcircled{3} \quad (0 < \theta < 1)$$

テ-ラー展開より

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta''h) \dots \dots \textcircled{4}$$

③、④を比べ、かつ f'' の連続性と十分小はな h に対しては $f''(a+\theta\theta h) \neq 0$ に注意して

$$\theta h^2 f''(a+\theta\theta h) = \frac{h^2}{2} f''(a+\theta''h)$$

$$\theta = \frac{f''(a+\theta''h)}{2f''(a+\theta\theta h)}$$

hA+10h=... f''(0) ≠ 0 かつ $\theta'' \rightarrow 0$ は連続

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{f''(a)}{2f''(a)} = \frac{1}{2}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} \text{ より } f'(0) = -\frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \dots$$

$$\therefore A. 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

$$(3) f(x) = e^x \cos x \text{ とする}$$

$$e^x \cos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= e^0 \cos 0 + e^0 (\cos 0 - \sin 0)x + \frac{1}{2}(-2e^0 \sin 0)x^2 + \frac{1}{6}\{-2e^0(\sin 0 + \cos 0)\}x^3$$

$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ax^{-2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ax^{-3}}{2x}$$

不定形

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ae^{-x}}{4x^3} \dots \textcircled{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2ae^{-x}}{12x^2} \dots \textcircled{3}$$

①、②、③より (分母) $\rightarrow 0$ である有限の値に収束するためには (分子) $\rightarrow 0$ である

$$\textcircled{1} \rightarrow 1+a+b=0 \quad \textcircled{2} \rightarrow 1-a=0 \quad \textcircled{3} \rightarrow 1+a-b=0$$

f.c

$$a=1 \quad (2) f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$a=2 \quad f'(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$c=-4 \quad f''(x) = 2 \frac{\cos x \cos^3 x - \sin^2 x - 3 \cos^2 x \sin x}{\cos^5 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2ax}{12x^2}$$

$$= \frac{2(1+2\sin^2 x)}{\cos^5 x}$$

$$\times 2 \quad \text{不定形} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{-x}}{24x} \quad f''(x) = 2 \frac{4 \sin x \cos^3 x - (1+2 \sin^2 x) 4 \cos^2 x}{\cos^5 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{-x}}{24x} \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + 0 \cdot x + \frac{2}{2}x^2$$

$$= 1 + x^2$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ より } \text{ロピタルの定理から}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{また } f''(x) = \frac{-xe^x(e^x - 1) - \{(1 - x)e^x - 1\}2e^x}{(e^x - 1)^3}$$

$\therefore$ ロピタルの定理より

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3e^x + x + 2xe^x + 3}{3(e^x - 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + 2xe^x + 1}{6(e^x - 1)e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2xe^x}{6\{e^x \cdot e^x + (e^x - 1)e^x\}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \text{ から } x^2 \text{ の項までのマクローリー展開は}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2$$

$$5 \quad (1) \quad (1+x^2)y^{(n+1)} + 2nx y^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0 \dots \textcircled{1} \text{ とおく}$$

[1] $n=1$ のとき

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = (1+x^2)\frac{2x}{(1+x^2)^2} - 2x\frac{1}{1+x^2} \\ = 0 \text{ で成り立つ}$$

[2] $n=k$ のとき

$$(1+x^2)y^{(k+1)} + 2kxy^{(k)} + k(k-1)y^{(k-1)} = 0 \text{ が成り立つとすると}$$

この両辺を x で微分して

$$2xy^{(k+1)} + (1+x^2)y^{(k+2)} + 2ky^{(k)} + 2kxy^{(k+1)} + k(k-1)y^{(k)} = 0$$

$$(1+x^2)y^{(k+2)} + 2(k+1)y^{(k+1)} + (k+1)ky^{(k)} = 0$$

よって $n=k+1$ でも成り立つ。

よって [1] [2] より ① は成り立つ

(2) ① に $x=0$ を代入して

$$y^{(n+1)}(0) = (1-n)n y^{(n-1)}(0)$$

$$\therefore y(0) = 0, y'(0) = 1 \text{ より}$$

$$y^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k-1)(2k-2) \dots 1 \cdot 0 \cdot y^{(0)}(0) = 0$$

$$y^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)(2k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot y^{(1)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

$$(3) \quad \tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

(6) (5式) = $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{1-x}}{x^3} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{x^3} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{x^3} \right\}$

$f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sin \frac{x}{2}$, $h(x) = \cos \frac{x}{2}$ とそれぞれマクローリン展開より

$f(x) = 1 + (-\frac{1}{2})x + (-\frac{1}{8})x^2 + (-\frac{1}{16})x^3$

$g(x) = 0 + \frac{1}{2}x + 0 + (-\frac{1}{48})x^3 + \dots$

$h(x) = 1 + 0 + (-\frac{1}{2})x^2 + 0 + \dots$

以上より

(5式) = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x) - h(x)}{x^3}$
 $= -\frac{1}{16} - \frac{1}{48} = -\frac{1}{12}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3}$ $f(x) = \tan^{-1} x$ のマクローリン展開より

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots$
 $= \tan^{-1} 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-2x}{2!} + \frac{6x^3}{4!} + \dots$
 $= x - \frac{1}{3}x^3 + \dots$

(7) マクローリン展開より

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$

$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

$\therefore \tan x \tan^{-1} x = x^2 + (-\frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5})x^6 + \dots$

$= x^2 + \frac{2}{9}x^6 + \dots$

$\therefore (5式) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \frac{2}{9}x^6 + \dots) - x^2}{x^6}$
 $= \frac{2}{9}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{3}x^3}{x^3} = -\frac{1}{3}$

(17) (7) $y = \tan x$ $y(0) = 0$

$y' = \sec^2 x = 1 + y^2$

$y(0) = 0$

$y' = 2yy'$

$y''(0) = 0$

$y''' = 2(y'^2 + y y'')$

$y'' = 2$

$y^{(4)} = 2(2y' + y'^2 + y)$

$$(8) \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} > e^{-x} > 1 - x$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = -1 + x + e^{-x}$$

$$f''(x) = 1 - e^{-x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$x > 0$ で $f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は $x > 0$ で単調増加する。

$$f(0) = 0 \text{ より } f'(x) > 0 \text{ より}$$

$f(x)$ は $x > 0$ で単調増加する。

$$f(0) = 0 \text{ より } x > 0 \text{ で } f(x) > 0 \text{ より}$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2} > e^{-x}$$

$$g(x) = e^x + x - 1 \text{ とおくと}$$

$$g'(x) = 1 + e^x \text{ より } (x > 0) \text{ で}$$

$g'(x) > 0$ より $g(x)$ は単調増加する。

$$g(0) = 0 \text{ より } x > 0 \text{ で}$$

$$g(x) > 0 \text{ より } e^x > 1 - x \text{ だから}$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2} > e^{-x} > 1 - x$$

$$(9) \text{ まず } \tanh x < \tan^{-1} x \text{、つまり } \frac{\tan^{-1} x}{\tanh x} - 1 > 0 \text{ を示す}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tanh x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} x = 0$$

$$\therefore \text{ここで } f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{\tanh x} \text{ とおくと } (x > 0)$$

ロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1} x)'}{(\tanh x)'} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1) = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$(8) \quad f(x) = \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{x}{1+x} \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \quad f(x) \text{ は単調増加}$$

$$\text{また } f(0) = 0 \text{ より常に } f(x) > 0 \quad \therefore \text{与式成立}$$

$$1) \textcircled{1} y = x^n e^{-x}$$

$$y' = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$

$$= x^{n-1} e^{-x} (n - x)$$

$$n \text{ は自然数 } \therefore x^{n-1} > 0$$

x	$\cdots$	n	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

増減表より $y = x^n e^{-x}$ は $x = n$ で最大値 $n^n e^{-n}$

$$\textcircled{2} \text{ (i) } f(n) > f(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n e^{-n} > (n+1)^n e^{-(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow e > \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$\text{(ii) } f(n) > f(n-1)$$

$$\Leftrightarrow n^n e^{-n} > (n-1)^n e^{-(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow e < \left(\frac{n}{n-1} \right)^n$$

$$\text{(iii) } \textcircled{1} \text{ より } \textcircled{2}$$

(10) (i) $n=1$ の時 $x y''' + 2 y'' + x y' + y = 0$

0位のベッセル微分方程式を微分して

$$(x y'' + y' + x y)' = x y''' + y'' + x y' + y = 0$$

よって $n=1$ で成立

(ii) $n=k$ の時 $x y^{(k+2)} + (k+1) y^{(k+1)} + x y^{(k)} + k y^{(k-1)} = 0$ と仮定

$$\begin{aligned} & \{x y^{(k+2)} + (k+1) y^{(k+1)} + x y^{(k)} + k y^{(k-1)}\}' \\ &= x y^{(k+3)} + y^{(k+2)} + (k+1) y^{(k+2)} + x y^{(k+1)} + (k+1) y^{(k)} = 0 \\ &= x y^{(k+3)} + (k+2) y^{(k+2)} + x y^{(k+1)} + (k+1) y^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

(2) $x=0$ の時 $y'=0$ $(n+1) y^{(n+1)} + n y^{(n-1)} = 0$

$$y^{(n+1)} = -\frac{n}{n+1} y^{(n-1)} \quad k+1=2\ell \text{ とおくと}$$

$$y^{2\ell} = (-1)^\ell \frac{(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 1}{2\ell(2\ell-2)(2\ell-4)\cdots 2} \times y^{(0)}(0)$$

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x^4}{4!} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \end{aligned}$$