

4

(1) $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$

$f(a_m) = 0$ より $(m = 1, 2, 3, \dots, n)$

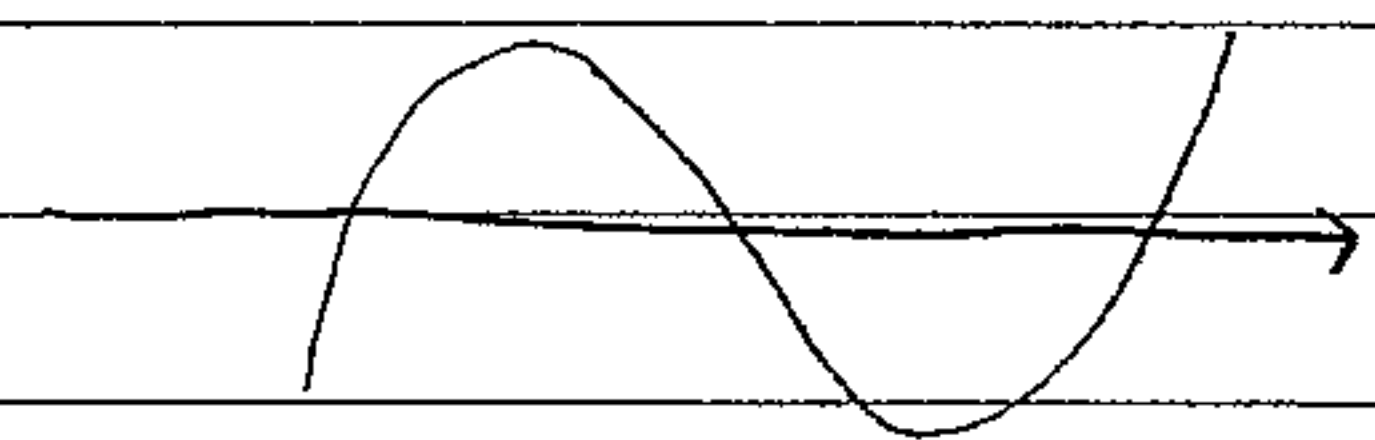
$f(a_{k-1}) = f(a_k) = 0$ $(k = 2, 3, \dots, n)$

ロールの定理より

$f'(c) = 0$ $(a_{k-1} < c < a_k)$ となる c が存在する。

以上より $(a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ に $f'(x) = 0$ の解が1つずつ存在する。

($f'(x) = 0$ は高々 $n-1$ 個の解を持つので)



(2) $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{1+1} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2} = f'(c)$

$f'(x) = f'(c)$ となる時

$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 1 = 0$

$x^2 = -2 \pm \sqrt{5}$

$x^2 \geq 0$ より $x^2 = \sqrt{5} - 2$ かつ $0 < x < 1$ かつ

$x = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$

$$3 \quad (1) \quad f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

平均値の定理より

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = f'(a+\theta h)$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = f'(c)$$

$$a < c < a+h$$

$$\text{よ} \quad 0 < \theta < 1$$

$$c = a + \theta h \text{ としてよ}$$

$$\Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad \left(\begin{array}{l} a < a+\theta h < a+h \\ \Leftrightarrow 0 < \theta < 1 \dots \textcircled{1} \end{array} \right)$$

$$\therefore (a+h)^3 = a^3 + h \cdot 3(a+\theta h)^2$$

$$\Leftrightarrow 3h\theta^2 + 6a\theta - (3a+h) = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{-3a + \sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2}}{3h} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\theta = \frac{-3a + \sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2}}{3h} \times \frac{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a}{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a}$$

$$= \frac{3a+h}{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}$$

$$4 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right) \dots \textcircled{1}$$

$$\text{よ} \quad f(x) = a^x, \quad g(x) = b^x \text{ とおく}$$

$$f'(x) = a^x \log a, \quad g'(x) = b^x \log b \text{ である}$$

$$\text{よ} \quad \textcircled{1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \dots \textcircled{2}$$

微分の定義より

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad \text{A. } \log \frac{a}{b}$$

$$(2) \quad (5式) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} \dots \textcircled{1}$$

$$x = \theta + \frac{\pi}{2} \text{ とおく} \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \theta \rightarrow 0 \text{ になる}$$

$$\text{よ} \quad \textcircled{1} \Leftrightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\theta + \frac{\pi}{2}) \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}}{\cos(\theta + \frac{\pi}{2})} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\theta + \frac{\pi}{2}) \cos \theta - \frac{\pi}{2}}{-\sin \theta}$$

$$f(\theta) = -\sin \theta \quad g(\theta) = (\theta + \frac{\pi}{2}) \cos \theta - \frac{\pi}{2} \text{ とおく}$$

$$f'(\theta) = -\cos \theta \quad g'(\theta) = \cos \theta - \sin \theta (\theta + \frac{\pi}{2})$$

ロピタルの定理より

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{g'(\theta)}{f'(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - \sin \theta (\theta + \frac{\pi}{2})}{-\cos \theta} = -1 \quad \text{A. } -1$$

5 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{\sin x} \right)^2$

ここでロピタルの定理より
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}{\cos x} = 1$
 $\therefore (5式) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2)}{x \sinh x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^4 + x^2 + 1)}{x \sinh x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}}{\sinh x + x \cosh x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 2}{(\frac{\sinh x}{x} + \cosh x)(x^4 + x^2 + 1)}$
 $= \frac{2}{(1+1) \cdot 1} = 1$

6 (1) 与式に対数をとると
(5式) $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log x$ ロピタルの定理より
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
よって求める極限值は $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

(2) (1)と同様にして
(5式) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\log(a^x + b^x) - \log 2)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{\log(a^x + b^x) - \log 2\}'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \frac{1}{2} \log ab$
よって
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \log \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} \quad \text{ロピタルの定理より} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{\frac{-2x}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} \quad x \rightarrow 0 \text{ の時} \\
 &= -\frac{1}{6} \\
 &\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{6}}
 \end{aligned}$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) \text{ とおく}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ のうち最大のものを a_1 とおく

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \text{ と書く.}$$

$$\alpha(x) = a_1 \left\{ \frac{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^x}{n} \right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$a_k = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ とすると}$$

$$0 < \frac{a_k}{a_1} \leq 1 \text{ より}$$

$$a_1 \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} < \alpha(x) \leq a_1 \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log(1/n)}{x}} = e^0 = 1 \text{ なので}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \textcircled{1} \text{ の(左辺)} \} = a_1 \times 1 = a_1$$

$$\text{ハサミウチの原理より} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = a_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= a_1$$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ よって連続

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$\frac{1}{x} = t \text{ とおくと}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t}$$

ロピタルの定理より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t e^t} = 0 \text{ よって微分可能}$$

(10) $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$ とおく

このとき $a < b$ としても一般性を失わない

$k=1, 2, \dots, n$ について

「 $f^{(k)}(x)=0$ が a と b の間に互いに異なる解をもつ」... (*) を示す

(i) $k=1$ のとき

$$f'(x) = n(x-a)^{n-1} (x-b)^n + n(x-a)^n (x-b)^{n-1}$$
$$= n(x-a)^{n-1} (x-b)^{n-1} (2x - a - b)$$

$$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a, b, \frac{a+b}{2} \text{ よって (*) は成立}$$

(ii) $k=n$ のとき (*) が成立すると仮定すると

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b) \text{ より}$$

$f(x)$ は $[a, b]$ で連続

かつ $f(a) = f(b) = 0$ で微分可能

よって $f^{(n)}(x) = 0$ の解を $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots (a < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < b)$ とすると

ロールの定理より

$f^{(n+1)}(x)$ は区間 (a, α_1) (α_1, α_2) ... は各々 $f^{(n+1)}(x) = 0$ となる x が存在する.

よって (*) は成立する.

(i) (ii) より 数学的帰納法により示された.