

3

$$(1) \quad y = \log |1+x|$$

$$1 \quad y' = \frac{1}{1+x}$$

$1 \times 2 \times 3 \times \dots$

$$2 \quad y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$3 \quad y''' = \frac{-1 \times \textcircled{1} \times \textcircled{2} (x+1)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$4 \quad y^{(4)} = \frac{-2 \times \textcircled{3} \times (1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$5 \quad y^{(5)} = \frac{6 \times \textcircled{4} (x+1)^3}{(1+x)^8} = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$6 \quad y^{(6)} = \frac{-24 \times \textcircled{5} (x+1)^4}{(1+x)^{10}} = \frac{-120}{(1+x)^6}$$

$$\text{よって } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \times (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{と推測できる}$$

これを数学的帰納法で示す

$$n=1 \text{ では } \frac{1}{1+x}$$

$$n=2 \text{ では } \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$n \geq 2$ のとき

$$n=k \text{ で } y^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1} \times (k-1)!}{(1+x)^k} \quad \text{が成り立つとすると}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{-1 \times (-1)^{k+1} \times (k-1)! \times k (1+x)^{k-1}}{(1+x)^{2k}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+2} \times k \times (k-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+2} \times k!}{(1+x)^{k+1}}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \text{ とおく}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(x-2)^3} - \frac{(-1)(-2)}{(x-1)^3}$$

$$\text{よって } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \cdots \textcircled{1} \text{ と推測できる.}$$

数学的帰納法より

(i) $n=1$ のとき成立

(ii) $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成立すると仮定すると

$n=k+1$ のとき

$$f^{(k+1)}(x) = \{ f^{(k)}(x) \}'$$

$$= \left\{ \frac{(-1)^k k!}{(x-2)^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \right\}'$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \left\{ \frac{1}{(x-2)^{k+2}} - \frac{1}{(x-1)^{k+2}} \right\}$$

$$\text{よって (i)(ii) より } f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right\}$$

$$(3) f(x) = e^x \sin x$$

$$f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin(x + \frac{n}{4}\pi) \dots\dots (*) \text{と推測できる}$$

数学的帰納法より

$$(i) n=1 \text{ のとき}$$

$$f'(x) = \sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{\pi}{4}) \text{ より 成立}$$

$$(ii) n=k \text{ のとき } (*) \text{ が成り立つと仮定すると}$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{\frac{k}{2}} e^x \left\{ \sin(x + \frac{k}{4}\pi) + \cos(x + \frac{k}{4}\pi) \right\}$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \sin(x + \frac{n+1}{4}\pi) \text{ となり}$$

(*) は $n=k+1$ においても成立する。

$$(i)(ii) \text{ より } f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin(x + \frac{n}{4}\pi)$$

$$(4) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$= \frac{dt}{dx} \times \frac{d}{dt} \times \left(\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{\dot{x}} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{\dot{x}} \times \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}$$

$$= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a - a \cos t \\ \dot{y} = a \sin t \\ \ddot{x} = a \sin t \\ \ddot{y} = a \cos t \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a^2(1 - \cos t) \cos t - a^2 \sin^2 t}{a^3(1 - \cos t)^3}$$

$$= \frac{(1 - \cos t) \cos t - \sin^2 t}{a(1 - \cos t)^3}$$

$$= \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$$

(5) 数学的帰納法により証明する

(i) $n=1$ のとき

(左辺) $= \frac{d}{dx} (x^0 e^{\frac{1}{x}}) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$
(右辺) $= (-1)^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ より成立.

(ii) $n=k$ のとき ($k \geq 2$)

$\frac{d^k}{dx^k} (x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}$ が成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (x^k e^{\frac{1}{x}}) &= \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d}{dx} \cdot x^k e^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{d^k}{dx^k} \left\{ kx^{k-1} e^{\frac{1}{x}} + x^k \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{d^k}{dx^k} \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}}_{\textcircled{7}} - \underbrace{\frac{d^k}{dx^k} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}_{\textcircled{8}} \end{aligned}$$

$\textcircled{7}$ より $k(-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}$

$\textcircled{8}$ より $\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \cdot x^{k-2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)$
 $= \frac{d}{dx} \left((-1)^{k-1} x \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^k} \right)$
 $= (-1)^{k-1} \frac{d}{dx} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^k}$
 $= (-1)^{k-1} \left(-kx^{k-1} e^{\frac{1}{x}} + x^k \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \right)$
 $= (-1)^k \cdot (kx^{k-1} e^{\frac{1}{x}} + x^{k-2} e^{\frac{1}{x}})$

$\textcircled{7} - \textcircled{8}$ より
$$\begin{aligned} &(-1)^k k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}} - (-1)^k k x^{k-1} e^{\frac{1}{x}} - (-1)^k x^{k-2} e^{\frac{1}{x}} \\ &= -(-1)^k x^{k-2} e^{\frac{1}{x}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

(6) $t = \sin^{-1} x$ とおく

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\text{故に } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\text{従って } (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

一方 $y = \sin(mt)$ は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2 y = 0 \text{ を満たすので求める解を得る.}$$

(7) $f(x) = x^2$ $g(x) = \sin ax$ とする

$$f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 3)$$

$$g^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n}{2}\pi)$$

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n n C_k \{f(x)\}^k \{g(x)\}^{n-k} \text{ から}$$

$$(x^2 \sin ax)^{(n)} = \sum_{k=0}^n n C_k (x^2)^{(k)} \{\sin ax\}^{n-k}$$

$$= n C_0 x^2 (\sin ax)^{(n)} + n C_1 (x^2)' \{\sin ax\}^{(n-1)} + n C_2 (x^2)'' (\sin ax)^{(n-2)}$$

$$\dots + n C_n (x^2)^{(n)} \sin ax$$

$$= x^2 \times a^n \sin(ax + \frac{n}{2}\pi) + 2nx a^{n-1} \sin(ax + \frac{n-1}{2}\pi)$$

$$+ \left(\frac{2n(n-1)}{2}\right) a^{n-2} \sin(ax + \frac{n-2}{2}\pi)$$

$$= a^{n-2} \{a^2 x^2 - n(n-1)\} \sin(ax + \frac{n}{2}\pi)$$

$$- x 2na^{n-1} \cos(ax + \frac{n}{2}\pi)$$

(8) $(x^2 e^{3x})^{(n)}$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} \cdot (e^{3x})^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0} x^2 \cdot (e^{3x})^{(n)} + \binom{n}{1} 2x \cdot (e^{3x})^{(n-1)}$$

$$+ \binom{n}{2} 2(e^{3x})^{(n-2)} + \underbrace{\sum_{k=3}^n (x^2)^{(k)} \cdot (e^{3x})^{(n-k)}}_{\rightarrow 0}$$

$$= 3^n x^2 e^{3x} + 2n 3^{n-1} x e^{3x} + n(n-1) 3^{n-2} e^{3x}$$

(9) $y = \sin^{-1} x$ を微分すると

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{1-x^2} \text{ より}$$

$$(1-x^2)(y')^2 = 1$$

この式を微分

$$-2x(y')^2 + (1-x^2)2y'y'' = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y'\{-x y' + (1-x^2)y''\} = 0$$

ここで y' は常に 0 でないから

$\{-x y' + (1-x^2)y''\} = 0$ となり この式をさらに n 階微分する

ライプニッツの公式より

$$(1-x^2)y^{(n+2)} + nC_1(-2x)y^{(n+1)} - (xy^{(n+1)} + 2nC_2y^{(n)}) - nC_1y^{(n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0 \dots \textcircled{A}$$

従ってこの漸化式は成立

$y^{(n)}(0)$ を a_n とおくと

① の式で $x=0$ とおくことにより 次の漸化式が得られる

$$a_{n+2} = n^2 a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n = \begin{cases} (n-2)^2(n-4)^2 \dots a_0 & (n: \text{偶数}) \\ (n-2)^2(n-4)^2 \dots 3^2 \cdot 1^2 a_1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$a_0 = \sin^{-1} x = 0$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ より}$$

$a_1 = 1$ であるから

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ (n-2)^2(n-4)^2 \dots 3^2 \cdot 1^2 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$(10) \quad (1-x^2) \frac{1}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2) \frac{1}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{ここで } \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad x = \sin t \text{ より}$$

$$(5式) = \cos^2 t \cdot \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\Rightarrow \cos t \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$