

1

$$(1) \frac{x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \dots + a^{n-1}}{x-a} \frac{x^n - a^n}{x^n - ax^{n-1}}$$

$$x^n - ax^{n-1}$$

$$ax^{n-1} - a^n$$

$$ax^{n-1} - a^2x^{n-2}$$

...

$$a^{n-1}x - a^n$$

$$a^{n-1}x - a^n$$

$$0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}x^0)$$

項数 $1+n$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}$$

$$= na^{n-1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$(2) \frac{1}{x} = (x-a) \left(x^{\frac{1}{2}} + ax^{\frac{3}{2}} + \dots + a^{n-1}x^{\frac{n-1}{2}} \right) = \frac{1}{n} a^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - \sqrt{(x-a)(x-b)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)(x+b) - (x-a)(x-b)}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + \sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(a+b)}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + \sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(a+b)}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}}$$

$$= \frac{2(a+b)}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = a+b$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \{ \sqrt{(x+a)(x+b)} + x \}$$

$$u = -x \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(a-u)(b-u)} - u \}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(a-u)(b-u) - u^2}{\sqrt{(a-u)(b-u)} + u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{ab - (a+b)u}{\sqrt{(a-u)(b-u)} + u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{ab}{u} - (a+b)}{\sqrt{\frac{ab}{u^2} - \frac{a+b}{u} + 1} + 1}$$

$$= -\frac{a+b}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx}$$

$$= \frac{1}{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx}$$

$$= \frac{a}{b} \quad (ab \neq 0 \text{ and } b \neq 0)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{2}{x}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

$x \rightarrow 0$ で $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ となる

正整数 n に対して

$$0 < \frac{1}{2n\pi} < \varepsilon \text{ となる } n \text{ をとると}$$

$$\frac{1}{2(n+1)\pi} \leq x \leq \frac{1}{2n\pi}$$

$$2n\pi \leq \frac{1}{x} \leq 2(n+1)\pi$$

よって $\frac{1}{x}$ は -1 と 1 の間をとるので

極限値は存在しない。

(8) (i) $x \rightarrow +0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

(ii) $x \rightarrow -0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1$$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない

よって関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続ではない。

(9) $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ (よ)

$$|x \sin \frac{1}{x}| = |x| |\sin \frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$0 \leq |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ なのでハサミうちの原理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

また $f(0) = 0$ より この関数は $x=0$ で連続.

$$\text{次に } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h} \quad \text{これは収束しない.}$$

微分可能ではない

(10) $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$... (よ)

$$0 \leq |x^3 \sin \frac{1}{x}| \leq |x^3|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \text{ だからハサミうちの原理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ より } f(x) \text{ は } x=0 \text{ で連続.}$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{よって (よ) } 0 \leq |x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ だからハサミうちの原理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{よって } f(x) \text{ は } x=0 \text{ で微分可能}$$