

$$\begin{aligned}
a_{n-1} - a_n &= a_{n-1} - \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(a_{n-1} - \frac{A}{a_{n-1}} \right) \quad \text{---} \star \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(a_{n-2} + \frac{A}{a_{n-2}} \right) - \frac{A}{\frac{1}{2} \left(a_{n-2} + \frac{A}{a_{n-2}} \right)} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\left(a_{n-2} + \frac{A}{a_{n-2}} \right)^2 - 4A}{a_{n-2} + \frac{A}{a_{n-2}}} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(a_{n-2} - \frac{A}{a_{n-2}} \right)^2}{a_{n-2} + \frac{A}{a_{n-2}}} > 0 \quad (\because \underbrace{a_{n-2} > 0}_{\text{数学的帰納法}}, A > 0)
\end{aligned}$$

$\therefore a_{n-1} > a_n$ i.e. $\{a_n\}$ は単調減少数列である (Q.E.D.)

± 7. この $\because a_n > 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は収束するので、

$$a_{n-1} - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\star \text{より } \frac{1}{2} \left(a_{n-1} - \frac{A}{a_{n-1}} \right) \rightarrow 0$$

$$a_{n-1}^2 \rightarrow A$$

$$a_{n-1} \rightarrow \sqrt{A} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\because a_{n-1} > 0)$$

$$\text{以上より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{A}$$

[検算]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ である。 (収束前提)}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}} \right) \text{ より } \alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{A}{\alpha} \right)$$

$$\text{これを解いて } \alpha = \sqrt{A}$$