平成 20 年度　生産工学科　力学演習Ⅰ

中間試験問題(2008/7/23　16:15-17:45　A202 教室)

注意事項

① 持ち込み・電卓使用はなし

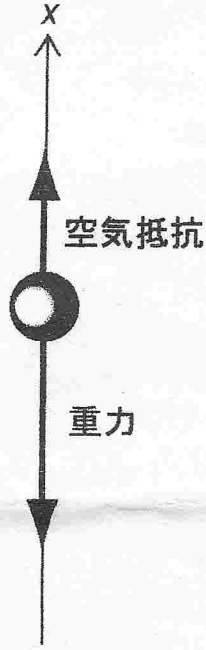
② 携帯電話の時計代わりの使用は厳禁・発見次第不正(カンニング)とみなす。

③ 学籍番号・氏名は各解答用紙に記入する。解答用紙の綴じは外さないこと。

④ 試験開始後 60 分を過ぎたら退室可。間違いなく自分のクラスの回収場所に提出する。

問 1

図のように、空気中に静止していた微小球が、重力によって落下する場合を考える。微小球の質量を m、重力加速度を g、空気抵抗の比例定数を k とするとき、以下の問いに答えよ。



（1）鉛直上向きに x 軸をとり、運動方程式を記せ（符号に注意せよ)。

（2）$\dot{x}=v$ として、（1）の運動方程式を v についての微分方程式に書き直して解くことで、v を時間 t の関数として求めよ。但し $t=0$ で $v=0$ とする。

（3）微小球の最初の位置を原点として、x を時間 t の関数として求めよ。

（4）微小球が落下する速さの極限（終端速度）を求めよ。

（5）空気抵抗の比例定数が $k=6\pi a\eta$ で与えられるときの終端速度の大きさの絶対値 [m/s] を計算せよ。ここで、a は微小球の半径、η は空気の粘性率とし、$a=1.0$ [μm]、$\eta=1.8\times10^{-5}$ [Ns/m²]、微小球の密度 $\rho=1.0\times10^{3}$ [kg/m³] とする。

$g=9.8$ [m/s²]

問 2

保存力 $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ とポテンシャルエネルギー U との間には $\vec{F} = -\nabla U$ の関係がある。

以下の問いに答えよ。ここで、$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は直交座標系の単位ベクトルであり、

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ である。

(1) 保存力 $\vec{F}$ がポテンシャルエネルギー U を持つための条件を $\nabla \times \vec{F}$ と $\nabla \times \nabla = \vec{0}$ より示せ。

(2) $F_x = 2xy^2, F_y = x^2y, F_z = 0$ の力が保存力であるか否かを示せ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、原点で $U = 0$ であるとする。

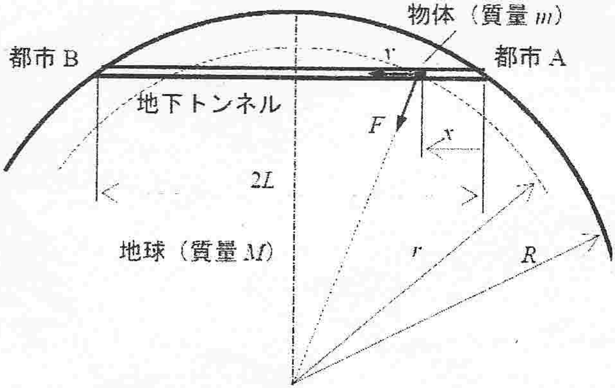
(3) $F_x = xyz, F_y = \frac{1}{2}x^2z + y^2 + 2y, F_z = \frac{1}{2}x^2y + 2z$ の力が保存力であるか否かを示せ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、原点で $U = 0$ であるとする。

(4) 原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に比例する引力が保存力であるか否かを示せ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、比例定数 $k(> 0)$ とし、原点で $U = 0$ であるとする。

(5) 原点からの距離の 3 乗に反比例する斥力が保存力であるか否かを示せ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、比例定数 $k(> 0)$ とし無限遠で $U = 0$ であるとする。

問 3

地球上の都市 A，B 間を結ぶ直線の地下トンネルを質量 m の物体が地球の重力のみで移動する．物体には重力のみが作用し，あらゆる摩擦は無視できる．また，地球は均質の静止球体と仮定する．地球の質量を M，半径を R，二都市間の直線距離を $2L$，万有引力定数を G として次の設問に答えよ．ただし，地上での重力加速度 g は用いずに解答すること．



(1) 地球内部で，地球の中心から半径 r の球部分が占める質量を M_r とする．M_r を M，R，r で表せ．

(2) 物体が地表からトンネルを進み，地球中心から半径 r の位置にあるとき，物体に働く中心力 F を地球の質量 M（注意：M_r ではない）を用いて表せ．ただし，F は，物体と地球中心から半径 r の球の間に働く万有引力であり，半径 r の球では質量 M_r は地球中心に集中しているとみなしてよい．

(3) 物体が地表から地球中心からの半径 r の位置に移動したとき，地表を基準点とした場合のポテンシャル U を求めよ．

(4) 地表からトンネルを x 進んだ位置における物体の速度 v を x で表せ．ただし，物体は都市 A から静かに初速度 $v=0$ で移動を始めるものとする．

(5) 物体が都市 A，B 間を移動するのに要する時間 T を求めよ．なお，必要であれば次の積分公式を用いてよい．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-a)(x-b)}} = \sin^{-1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

問 4

地表から鉛直上向きに z(t)の位置に質量 m の物体があるとせよ。ここで t は時刻を表す。G, M, R をそれぞれ万有引力定数，地球の質量，地球の半径とする。この物体は時刻 t=0 まで z=H の高さに静止しており，t=0 で鉛直下方に落下を始めたとする。なお，本問題では空気抵抗は無視すること。また，本問では地上での重力加速度 g は用いず解答すること。

(1) z(t)に関する運動方程式を立式せよ。答えは $\ddot{z}(t) = \left(\ z(t)\text{の関数}\ \right)$ のかたちで与えよ。

(2) 時刻 t=0 での落下の加速度の大きさはどれだけか答えよ。

(3) $\dot{z}(t)$ を $z(t)$ の関数として表せ。(注：(1)で与えた運動方程式を解くこと。また問題中に与えられた初期条件を用いて積分定数は決定すること。)

(4) 物体が地表まで落ちてきたときの落下の速度の大きさを答えよ。