平成２７年度　機械系の力学・演習Ｉ　期末試験

平成 28 年 2 月 4 日実施

重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

問１

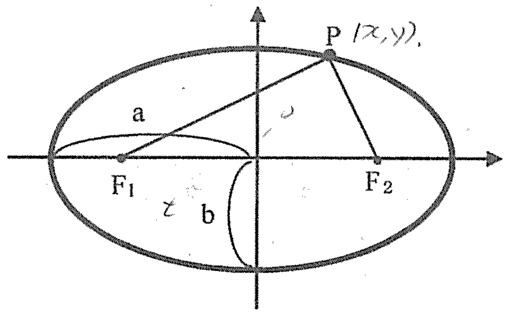
(1) $\vec{F} = -ky\vec{i} + kx\vec{j}$ （k は比例定数）で与えられる力が保存力かどうかを調べよ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、$\vec{i}, \vec{j}$ は、それぞれ x 軸および y 軸の単位ベクトルであり、原点で $U = 0$ であるとする。

(2) 力の成分がそれぞれ、$F_x = xyz, F_y = \frac{1}{2}x^2z + y^2 + 2y, F_z = \frac{1}{2}x^2y + 2z$ で与えられる力が保存力かどうかを調べよ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、原点で $U = 0$ であるとする。

(3) $\vec{F} = -kr^3\vec{r}$ で与えられる力が保存力かどうかを調べよ。もし保存力ならばそのポテンシャルエネルギー U を求めよ。ただし、比例定数 $k(>0)$ とし、原点で $U = 0$ であるとする。

問２

図のように、長半径 a, 短半径 b のなめらかな楕円(ellipse)の周上に拘束された質点が、楕円の 2 つの焦点 F_1 および F_2 (focus of the ellipse)からの距離に比例した引力（比例定数をそれぞれ k_1, k_2 とする）を受けている運動を考える。$k_2 > k_1$, として、以下の問いに答えよ。



(1) 質点の x, y 座標が満たす楕円の方程式を示せ。

(2) 上記の楕円の焦点 F_1 および F_2 の座標を求めよ。

(3) 質点が図中の点 P(x, y)の位置にあるとき、質点に働く力の大きさを a, b, k_1, k_2, x, y を用いて表せ。

(4) 質点に働く力のポテンシャルエネルギーU を a, b, k_1, k_2, x, y を用いて表せ。

(5) 質点に働く力がつり合う位置の x 座標を求めよ。

問３

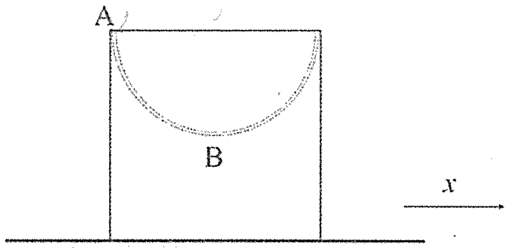
滑らかで水平な床の上に一辺がa，質量がMの立方体が載っている．この立方体には図のように左上の角から右上の角まで半円状の内面が滑らかな貫通穴が空いている．この穴の入り口Ａに，質量mの質点を静かに置いた．この後の運動として，下記の問いに答えよ．

(1) 質点mが穴の最下点Ｂに達した時の，立方体の移動量を求めよ．

(2) 質点mが穴の最下点Ｂに達した時の床に対する速度をvとしたとき，立方体の床に対する速度Vを求めよ．

(3) 質点mが穴の最下点Ｂに達した時の質点の立方体に対する速度を a, m, M, g を用いて示せ．ただし，Vは使わないこと．

(4) 質点が穴の中で再び上昇し静止した．この時の立方体の移動量を求めよ．



問４

緯度をαの地点に設置されたフーコーの振り子を考える．地上に固定された運動座標系として鉛直方向を z 軸に，水平方向のうち東をx軸，北をy軸とする．振り子は微小振動しているとして$\dot{z}$を無視するとき，以下の問いに答えよ．(2)以降では$\boxed{\text{A}}$～$\boxed{\text{F}}$に当てはまる式，または数字を答えよ．

振り子のひもの長さをl，先端の質量をmとし，地球の自転の角速度をωとする．

$2m\omega v$

(1) 地球の自転の角速度ベクトル$\vec{\omega}$の運動（地上の）座標系上の成分を示せ．

(2) 振り子の先端の速度を$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$とし，$\omega^2$の項を微小として無視すると運動方程式は以下のようになる．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$には符号は含んでよい．

$$m\ddot{x} = -mg\,\frac{x}{l} + \boxed{\text{A}} \qquad \cdots ①$$

$$m\ddot{y} = -mg\,\frac{y}{l} + \boxed{\text{B}} \qquad \cdots ②$$

(3) 式①に$-y$，式②にxをかけて，両辺を合計し，mを消去すると下記のようになる．

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \boxed{\text{C}} \qquad \cdots ③$$

(4) 式③の両辺を積分すると積分定数をCとして下記となる．

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \boxed{\text{D}} + C \qquad \cdots ④$$

(5) ここで計算を簡単にするため，極座標$(x, y) = (r\sin\theta, r\cos\theta)$を導入し，式④に代入して整理すると次式となる．振り子は原点を通るため，$C = 0$としてよい．

$$\dot{\theta} = \boxed{\text{E}}$$

(6) つまり振り子の振動面は地表に対して角速度$\boxed{\text{E}}$で回転することになる．北緯$\alpha = 30°$（屋久島くらい）では，$\boxed{F：整数}$時間で１周する．