平成21年度　生産工学科　力学演習Ⅰ
中間試験問題(2009/6/8　16:15-17:45　C201･C301 教室)

注意事項

① 持ち込み・電卓使用はなし

② 携帯電話の時計代わりの使用は厳禁。これを発見次第，直ちに不正（カンニング）とみなす。

③ 散逸防止のため，学籍番号と氏名は各解答用紙に記入する。解答用紙の綴じは外さないこと。

④ 試験開始60分以降退室可。答案は間違いなく自分のクラスの回収場所へ提出すること。

問1

位置ベクトル $\vec{A}=(1, 2, 3)$,　$\vec{B}=(-1, 2, 3)$ について以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の内積を求めよ。

(2) $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の外積を求めよ。

(3) $\vec{A}$ 方向と $\vec{B}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_A$ と $\vec{e}_B$ を求めよ。

(4) ベクトル $\vec{A}$ を，ベクトル $\vec{B}$ に平行なベクトルと垂直なベクトルとに分解せよ。

問２

一直線（x軸とする）上を運動する質点について，次の設問に答えよ．

(1) 加速度 a は時刻 t とともに変化して $a = a_0 + a_1 t$ で与えられ，時刻 t=0 で質点は位置 x_0，速度 v_0 であったとき，任意の時刻 t における質点の位置 x，速度 v を求めよ．ただし，a_0，a_1，v_0，x_0 は定数とする．

(2) 質点の位置 x と時刻 t との間に $x = Ae^{-Bt}\cos\omega t$ （A，B，ωは定数）の関係があるとき，任意の時刻 t における速度 v，加速度 a を求めよ．

(3) 質点は原点（x=0）から初速度０で出発し，位置 x とともに変化する $a = p\dfrac{q}{r+x}$ （p，q，r は定数で，いずれも正）なる加速度 a で運動する．このとき，任意の時刻における質点の位置 x と加速度 a を，それぞれ速度 v を用いて表せ．なお，$y(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = f(y)$ の解法の一つに次のような方法がある．必要に応じてこれを参考にしてよい．［関数の両辺に $\dfrac{dy}{dt}$ を乗じ $\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = f(y)\cdot\dfrac{dy}{dt}$ とし，これを積分して $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = \int f(y)dy + C$ （ここで C は積分定数）．］

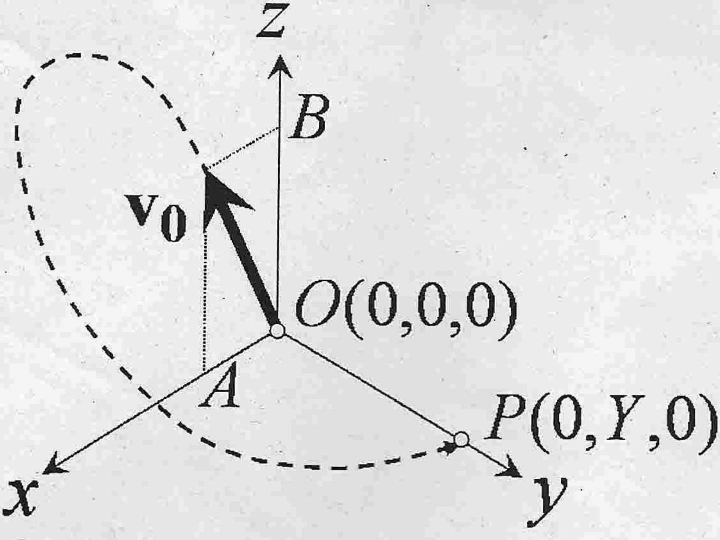
問 3

図のように、3 次元直交座標（$x-y-z$）の原点 $O(0,0,0)$ から、質量 m の飛翔物体を初速度 $\mathbf{v_0}=(v_{x0},v_{y0},v_{z0})=(A,0,B)$　（$A>0, B>0$）　で発射し、飛翔させる。飛翔物体には、$-z$ 方向の重力（重力加速度を $g>0$ とする）のほか、空気の流れ（風）と飛翔物体の間の相対速度に比例した力が作用する。すなわち、飛翔物体と風の速度ベクトルをそれぞれ、$\mathbf{v}$、$\mathbf{V}_w$ としたとき、飛翔物体には $-m\gamma(\mathbf{v}-\mathbf{V}_w)$ の力がはたらくものとする。ここで γ は正の定数とする。今、風速ベクトルを $\mathbf{V}_w=(V_x,V_y,0)$ とする。V_x、V_y は時刻 t と位置座標 x、y、z にはよらない定数であるとする。以下の設問に答えよ。

（1）　飛翔物体の x 方向、y 方向、z 方向のそれぞれの運動方程式を示せ。

（2）　時刻 $t>0$ における飛翔物体の速度ベクトル $\mathbf{v}(t)=(v_x(t),v_y(t),v_z(t))$ と位置ベクトル $\mathbf{X}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ を時刻 t の関数で示せ。

（3）　飛翔物体は $t>0$ において図中の破線で示すような軌跡で飛翔し、ある時刻に、ちょうど y 軸上の一点 $P(0,Y,0)$（$Y>0$）の位置に着地した。このような状況が起こるためには、風速ベクトル $\mathbf{V}_w$ の x 方向成分 V_x はいくらでなくてはならないか答えよ。



$-mg-kv$

$=-\frac{k}{m}\left(v+\frac{mg}{k}\right)$

$v+\frac{mg}{k}=Ce^{-\frac{k}{m}t}$

$v+\frac{mg}{k}=\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)e$

$x=\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$

問 4

x,y,z 軸からなる 3 次元直交座標系があり，z 軸は鉛直上向きとする。ここに実媒介変数 h で表現される下記のような曲線軌道がある。

$$x = \sin h$$
$$y = 1 - \cos h$$
$$z = h$$

(1)　この軌道を原点から $(x(h), y(h), z(h))$ まで辿(たど)ったときの道のり $s(h)$ を h の関数として与えよ。

(2)　この軌道上の点 $(x(h), y(h), z(h))$ における軌道の単位接線ベクトル $\vec{\mathbf{t}}(h)$ を h の関数として与えよ。ただし，軌道の単位接線ベクトルは，軌道上の点の位置ベクトルの道のりに対する変化率である。

(3)　この軌道上の点 $(x(h), y(h), z(h))$ における軌道の曲率半径 $\rho(h)$ を与えよ。ただし，軌道の曲率半径 ρ は，$1\Big/\left|\dfrac{d\vec{\mathbf{t}}}{ds}\right|$ である。

(4)　この軌道上をまったく摩擦なしに滑って移動できる質量 m の 1 個の質点がある。この質点に，初速度 v_o を時刻 $t=0$ で h の正の方向へ与えた。これ以降，質点がいったん停止するまでの時間範囲の質点の運動を考える。質点は時刻 t には軌道上のどこにあるか。時刻 t での質点の z 座標 $z(t)$ を時刻 t の関数として与えよ。重力加速度は g とすること。