平成 22 年度　生産工学科　力学演習 I
期末試験問題（2010/8/2　16:15-17:45　A107・C301 教室）

注意事項　① 持ち込み・電卓使用はなし

② 携帯電話の時計代わりの使用は厳禁。これを発見次第，直ちに不正（カンニング）とみなす。

③ 散逸防止のため，学籍番号と氏名は各解答用紙に記入する。解答用紙の綴じは外さないこと。

④ 試験開始 60 分以降退室可。答案は間違いなく自分のクラスの回収場所へ提出すること。

問 1

滑らかな水平面上で、一端を固定したばね（ばね定数 k）の他端に質量 m の質点を付け、時刻 $t=0$ で、自然長のところで、ばねが伸びる方向に初速度 V_0 を与えた。ばねが伸びる方向を x 座標の正方向とする。

（1） 質点の運動方程式から、質点の変位、速度、加速度を時間 t の関数として表せ。

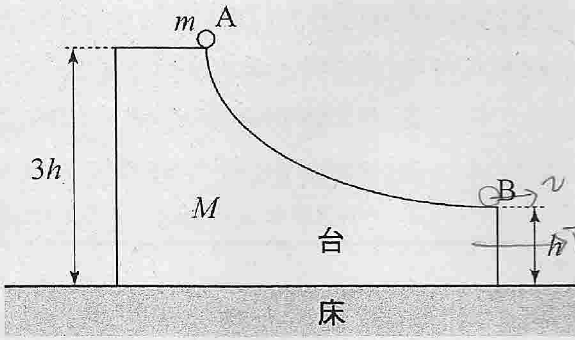
（2） ばね力の最大値を求めよ。

（3） 質点の慣性力の最大値を求め、ばね力の最大値と等しくなることを示せ。

（4） 質点の質量を 2 倍とし、同様に、$t=0$ で、自然長のところで、ばねが伸びる方向に初速度 V_0 を与えた。以降の運動が、質点の質量が m の場合の運動と一致するためには、ばね定数は元の何倍になればよいか。

問２

右図のように，なめらかで水平な床の上に，なめらかな曲面 AB をもつ質量 M の台が置かれている。いま，質量 m の小球を頂点 A で静かに離したところ，小球は曲面 AB に沿ってすべり落ち，台の先端 B から床と並行に飛び出し，床上に落下した。台の頂点 A，先端 B の床からの高さはそれぞれ $3h$, h で，小球と曲面 AB の間，台と床の間には摩擦はないものとして，次の問いに答えよ。なお，重力加速度の大きさは g とせよ。



(1) 小球が先端 B から離れる瞬間の，小球および台の床に対する速度を右向きにそれぞれ v, V としたとき，台と小球からなる系において，運動量保存則の式を立てよ。

(2) 同様に，台と小球からなる系において，力学的エネルギー保存則の式を立てよ。

(3) 小球が先端 B を離れた瞬間の，小球の床に対する速度を求めよ。また，台の床に対する速度を求めよ。

(4) 小球が先端 B を離れた瞬間から，床下に落下するまでに要する時間を求めよ。

(5) 小球が床下に落下した瞬間の，先端 B と小球の落下点の水平距離を求めよ。

問３

質量mの質点が$x=\cos\omega t$、$y=2\sin\omega t$で与えられる軌道に沿って運動している。

(1) 質点のｘ方向とｙ方向の速度v_x、v_y及び加速度a_x、a_yを求めよ。

(2) $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$とした時、質点のｘ方向とｙ方向の運動方程式を示せ。また、質点が受ける力のｘ成分F_xとｙ成分F_yを求め、その力が中心力であることを示せ。

(3) 質点が受ける力が保存力であるかどうかを調べ、保存力ならポテンシャルＵを求めよ。
（$x=y=z=0$で$U=0$）

(4) 質点の運動エネルギーを求めよ。また運動エネルギーとポテンシャルの合計を求め、合計のエネルギーが保存されているかを示せ。

問 4

下図のように，$x-y$ 平面内において，質量 m の質点１が，原点に静止した質量 $M(M>m)$ の質点２の周りを周回する運動を考える．動径方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$，方位角方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とする．質点１の位置ベクトルは，質点１と質点２との距離（原点からの距離）を $r(r>0)$ として $\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$ とかける．以下，動径 r と，方位角 θ は時間 t の関数であると考えよ．

（1）　図のように，質点１に任意の外力 $\mathbf{F}=F_r\mathbf{e}_r+F_\theta\mathbf{e}_\theta$ が作用する場合，質点１の動径方向と方位角方向の運動方程式をそれぞれ示せ．

（2）　質点１に作用する外力 $\mathbf{F}$ の，原点から無限遠を基準にしたポテンシャルが，

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}\quad (G>0)$$

と定義できる場合，外力 $\mathbf{F}$ の動径方向成分 F_r と方位角方向成分 F_θ を計算せよ．

（3）　（２）のとき，周回する質点１の速度ベクトルを $\mathbf{v}=v_r\mathbf{e}_r+v_\theta\mathbf{e}_\theta$ とする．質点１の角運動量 L と，その時間増分 dL/dt を計算せよ．

（4）　（２）のとき，質点１の全力学的エネルギー E を，角運動量 L と，速度の動径方向成分 v_r を用いて表せ．

（5）　角運動量 L の量が与えられた場合，この周回運動が成立するための，全力学的エネルギー E の最小値を示せ．（ヒント：（４）で $mv_r^2/2\geq 0$ であることより，E に関する不等号関係が定まり，さらにその式より，E の最小を規定する r と，その量が定まる）