[1] $\begin{cases} m(\alpha-\beta)=R \\ M\beta = R \end{cases}$

より、$m(\alpha-\beta)=M\beta$

$$m\alpha=(m+M)\beta$$

$$\therefore \begin{cases} \beta=\dfrac{m}{m+M}\alpha \\ R=\dfrac{mM}{m+M}\alpha \end{cases}$$

[2]

◦摩擦係数一定時

$$m\ddot{x}=-\mu' mg$$

$$\ddot{x}=-\mu' g$$

$$v_0-\mu' gT=0$$

$$\therefore T=\frac{v_0}{\mu' g}$$

$$X=v_0T-\frac{1}{2}\mu' gT^2=\frac{v_0^2}{2\mu' g}$$

◦一定でない時

$$m\ddot{x}=-\mu'(1-av)mg$$

$$\ddot{x}=-\mu'(1-a\dot{x})g$$

$$\frac{d}{dt}\dot{x}=-\mu'(1-a\dot{x})g$$

$$-\frac{1}{a}\frac{d}{dt}(1-a\dot{x})=-\mu'(1-a\dot{x})g \quad \left(\because -\frac{1}{a}\frac{d}{dt}=0\right)$$

$$\frac{d}{dt}(1-a\dot{x})=a\mu'(1-a\dot{x})g$$

$$1-a\dot{x}=C_0e^{a\mu' gt}$$

$t=0$のとき

$$1-av_0=C_0$$

$$\therefore 1-a\dot{x}=(1-av_0)e^{a\mu' gt} \quad —(※)$$

$t=T$のとき、$\dot{x}=0$から

$$1=(1-av_0)e^{a\mu' gT} \quad —☆$$

$$\log\frac{1}{1-av_0}=a\mu' gT$$

$$T=\frac{1}{a\mu' g}\log\frac{1}{1-av_0}$$

また、(※)を両辺tで積分すると

$$t-ax=\frac{1}{a\mu' g}(1-av_0)e^{a\mu' gt}+C_1$$

$t=0$のとき$x=0$より

$$0=\frac{1-av_0}{a\mu' g}+C_1$$

$$\therefore C_1=-\frac{1-av_0}{a\mu' g}$$

$t=T$のとき

$$T-aX=\frac{1}{a\mu' g}\underbrace{(1-av_0)e^{a\mu' gT}}_{=1\ (\because ☆)}-\frac{1-av_0}{a\mu' g}$$

$$=\frac{v_0}{\mu' g}$$

$$X=\frac{1}{a}\left(T-\frac{v_0}{\mu' g}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2\mu' g}\left(-av_0+\log\frac{1}{1-av_0}\right)$$

$$=-\frac{1}{a^2\mu' g}\{av_0+\log(1-av_0)\}$$

[5]

(1) $m\ddot{x}=-c\dot{x}$

$$m\ddot{y}=-mg-c\dot{y}$$

(2) $\begin{cases} \dot{x}(0)=v_0\cos\theta_0 & x(0)=0 \\ \dot{y}(0)=v_0\sin\theta_0 & y(0)=0 \end{cases}$

$m\ddot{x}=-c\dot{x}$から $\ddot{x}=-\frac{c}{m}\dot{x}$

$$\therefore \dot{x}(t)=C_0e^{-\frac{c}{m}t}$$

$\dot{x}(0)=v_0\cos\theta_0$より

$$\dot{x}(t)=v_0\cos\theta_0\, e^{-\frac{c}{m}t}$$

両辺tについて積分し、

$$x(t)=-\frac{m}{c}v_0\cos\theta_0\, e^{-\frac{c}{m}t}+C_1$$

$x(0)=0$より

$$x(t)=\frac{m}{c}v_0\cos\theta_0\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

$m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}$

$= -c(\dot{y} + \frac{mg}{c})$

$\ddot{y} = -\frac{c}{m}(\dot{y} + \frac{mg}{c})$

$\dot{y}(t) + \frac{mg}{c} = C_0 e^{-\frac{c}{m}t}$

$\dot{y}(0) = v_0 \sin\theta_0$ より

$\dot{y}(t) + \frac{mg}{c} = (v_0\sin\theta_0 + \frac{mg}{c}) e^{-\frac{c}{m}t}$

両辺tで積分.

$y(t) + \frac{mg}{c}t = -\frac{m}{c}(v_0\sin\theta_0 + \frac{mg}{c}) e^{-\frac{c}{m}t} + C_1$

$y(0) = 0$ より.

$y(t) + \frac{mg}{c}t = \frac{m}{c}(v_0\sin\theta_0 + \frac{mg}{c})(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$

よって. $\frac{cx}{mv_0\cos\theta_0} = 1 - e^{-\frac{c}{m}t}$

$\frac{cx - mv_0\cos\theta_0}{mv_0\cos\theta_0} = -e^{-\frac{c}{m}t}$

$\ln(1 - \frac{cx}{mv_0\cos\theta_0}) = -\frac{c}{m}t$

$t = -\frac{m}{c}\ln\left(\frac{cx - mv_0\cos\theta_0}{mv_0\cos\theta_0}\right)$

$y = (v_0\sin\theta_0 + \frac{mg}{c})\frac{x}{v_0\cos\theta_0} + \frac{m^2 g}{c^2}\ln(1 - \frac{cx}{mv_0\cos\theta_0})$

$y = (v_0\sin\theta_0 + \frac{mg}{c})\frac{x}{v_0\cos\theta_0} - \frac{m^2 g}{c^2}\ln(1 - \frac{cx}{mv_0\cos\theta_0})$

(3) $y \to -\infty$

$x \to \frac{mv_0}{c}\cos\theta_0$ $(t \to \infty)$

(1) $-mg - kmv^2 = m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dy}$

両辺2かけると…

$-2k(v^2 + \frac{g}{k}) = \frac{d}{dy}v^2$

$v^2 + \frac{g}{k} = C_0 e^{-2ky}$

$v = \sqrt{C_0 e^{-2ky} - \frac{g}{k}}$ $(\because v \geqq 0)$

(2) (1)より $y = 0$、$v = v_0$ とすると.

$v_0^2 + \frac{g}{k} = C_0$

$v = 0$ として

$0 = C_0 e^{-2ky} - \frac{g}{k}$

$\frac{g}{C_0 k} = e^{-2ky}$

$\ln\left(\frac{g}{C_0 k}\right) = -2ky$

$\therefore y = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{kv_0^2 + g}{g}\right)$

(3)

(i) $v \geqq 0$ のとき.

$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - kmv^2 < 0$

(ii) $v \leqq 0$ のとき.

$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + kmv^2 = 0$ とすると.

$v = -\sqrt{\frac{g}{k}}$

$-mg + kmv^2 = mv\frac{dv}{dy}$

$2k(v^2 - \frac{g}{k}) = \frac{d}{dy}v^2$ ((1)と同様)

$v^2 - \frac{g}{k} = C_0 e^{2ky}$

$v \leqq 0$ から. $v^2 = C_0 e^{2ky} + \frac{g}{k}$

$v = -\sqrt{C_0 e^{2ky} + \frac{g}{k}} \to -\sqrt{\frac{g}{k}}$ $(y \to$

[7]

$\ddot{x}=0$、$\ddot{y}=-2cy$

より、

$\dot{x}=C_0$、$\dot{y}=C_0'\sin\sqrt{2c}\,t+C_1'\cos\sqrt{2c}\,t$

∴ $x=C_0t+C_1$、$y=C_0'\sqrt{2c}\cos\sqrt{2c}\,t-C_1'\sqrt{2c}\sin\sqrt{2c}\,t$

$\begin{cases} C_0=u、C_1=0 \\ C_0'=0、C_1'=a \end{cases}$

∴ $x=ut$、$y=a\cos\sqrt{2c}\,t$

∴ $y=a\cos\frac{\sqrt{2c}}{u}x$

[8]

(1) $t=0$のとき $v=0$.

$m\ddot{x}=-kx$

$x=C_0\sin\omega t+C_0'\cos\omega t$

$t=0$のとき. $x=a$より $C_0'=a$

$v=0$より. $\dot{x}=\omega C_0\cos\omega t-\omega C_0'\sin\omega t$

から $C_0=0$

∴ $x=a\cos\omega t$ $\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

(2) $x=C_0\sin\omega t+C_0'\cos\omega t$

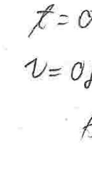
$t=0$のとき. $x=0$より $C_0'=0$

$v=v_0$より $\omega C_0=v_0$

$C_0=\frac{v_0}{\omega}$

∴ $x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ $\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

[9]



$m\ddot{x}=-2S\sin\theta$

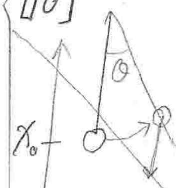
$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}$ から

$m\ddot{x}=-2S\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}\fallingdotseq\frac{2S}{l}x$

∴ $\omega^2=\frac{2S}{ml}$、$\omega=\sqrt{\frac{2S}{ml}}$

周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{2S}}$

[10]



$m\ddot{x}=-mg-kx$

$=-k\left(x+\frac{mg}{k}\right)$

$\ddot{x}=-\frac{k}{m}\left(x+\frac{mg}{k}\right)$

$x+\frac{mg}{k}=C_0\sin\omega t+C_0'\cos\omega t$

$\dot{x}=\omega C_0\cos\omega t-\omega C_0'\sin\omega t$

$t=0$のとき. $v_0=\omega C_0$ $\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

∴ $C_0=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$、$C_0'=0$

$x+\frac{mg}{k}=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{m}{k}}t$

$0=-mg-kx$

$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$

$ml\dot{\theta}^2=-mg\cos\theta+T$

最下点付近なので $\sin\theta\approx\theta$

$ml\ddot{\theta}=-mg\theta$

$ml\dot{\theta}^2=-mg+T$ —(*)

ここで $\theta=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ とすると.

$t=0$のとき. $\theta=0$より $B=0$

$-\omega^2\cancel{A}ml\cancel{\sin\omega t}=-mg\cancel{A\sin\omega t}$

∴ $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\dot{\theta}=\omega A\cos\omega t$

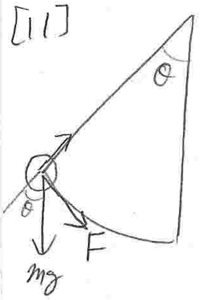
$v_0=l\dot{\theta}=l\omega A$

∴ 振幅 $A=\frac{v_0}{l\omega}$、周期 $\frac{2\pi}{\omega}$

(*)から. $T=mg+ml\left(\frac{v_0}{l}\right)^2\cos^2\omega t$

$=mg+m\frac{v_0^2}{l}\cos^2\omega t$

[11]



$-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$

$-ml\ddot{\theta} = mg + mg\sin\theta$

$\theta \approx 0$ のとき.

$\sin\theta \approx \theta$

$-ml\ddot{\theta} = mg(1+\theta)$

$-ml\frac{d}{dt^2}(1+\theta) = mg(1+\theta)$

$1+\theta = C_0\sin\omega t + C_1\cos\omega t$

$t=0$ のとき. $\theta = 1$、$\dot{\theta} = 0$

$\therefore C_1 = 2$、$C_0 = 0$

$\therefore 1+\theta = 2\cos\omega t$

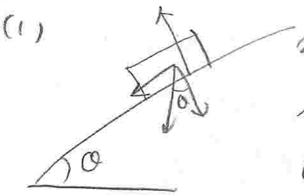
$\theta = 2\cos\omega t - 1 = 0$ とすると.

$\omega t = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$

[12]

(1)



$mg\sin\theta_0 = \mu mg\cos\theta_0$

$\mu = \tan\theta_0$

$\theta_0 = \tan^{-1}\mu$

(2) $N = mg\cos\theta + K\sin\theta$ 、加速度0

$0 = -mg\sin\theta + K\cos\theta - \mu N$

$\mu(mg\cos\theta + K\sin\theta) = -mg\sin\theta + K\cos\theta$

$mg(\mu\cos\theta + \sin\theta) = K(\cos\theta - \mu\sin\theta)$

$K = \frac{\sin\theta_0\cos\theta + \sin\theta\cos\theta_0}{\cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta_0\sin\theta}mg$

$= \frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\cos(\theta+\theta_0)}mg$

$= mg\tan(\theta+\theta_0)$

[3]

物体は遠心力の働く向きの変わる点Aで抗力を失い離れる.

○点Aでの力のつり合いより.

抗力N、Aでの速度vとして.

$N + \mu a = \frac{1}{2}Mg$

$N = \frac{1}{2}Mg - \mu\frac{v^2}{R}$

○力学的エネルギー保存則より.

$\mu gh = Mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}\mu v^2$

$v^2 = 2gh - gR$ を用いて.

$N = \frac{1}{2}\mu g - \frac{2\mu gh}{R} + \mu g$

$= \frac{3}{2}\mu g - \frac{2\mu gh}{R}$

○$N \leqq 0$ となるとき A では離れるので;

$N = \frac{3}{2}\mu g - \frac{2\mu gh}{R} \leqq 0$

$\therefore h \geqq \frac{3}{4}R$

[4]

$mR\omega^2 = \mu mg$

$R = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{0.4\cdot 9.8}{2\cdot 2} = 0.98$ m

(3) (2)と同様に.

$mg\sin\theta - k\cos\theta - \mu(mg\cos\theta + k\sin\theta) = 0$

$-k(\cos\theta + \mu\sin\theta) = \mu mg\cos\theta - mg\sin\theta$

$k = \frac{mg(\tan\theta - \mu)}{1+\mu\tan\theta}$

$\mu = \tan\theta_0$ を代入して.

$k = mg\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{1+\tan\theta\tan\theta_0}$

$= mg\tan(\theta - \theta_0)$

[7] 質点なので質量は1

x方向: $\frac{dx}{dt} = u \quad x = ut$ 、 $t = \frac{x}{u}$

y方向: $\frac{d^2y}{dt^2} = -c^2 y$

一般解は.

$y = A_1 \cos ct + A_2 \sin ct$

$t = 0$ のとき $y = A_1 = a$.

$\frac{dy}{dt} = cA_2 = 0$ より. $A_2 = 0$

$\therefore y = a \cos ct = a \cos c\frac{x}{u}$