

平成 22 年度 生産工学科 力学演習 I

中間試験問題(2010/6/7 16:15-17:45 A107・C301 教室)

注意事項

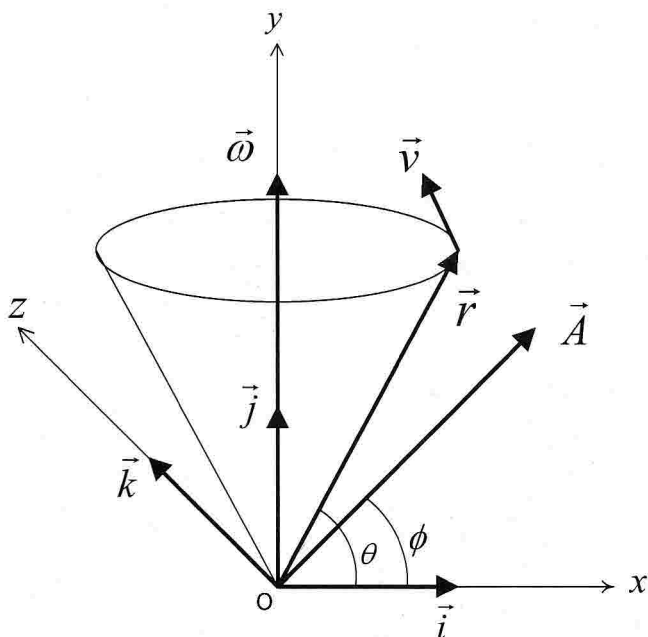
- ① 持ち込み・電卓使用はなし
- ② 携帯電話の時計代わりの使用は厳禁。これを発見次第、直ちに不正（カンニング）とみなす。
- ③ 散逸防止のため、学籍番号と氏名は各解答用紙に記入する。解答用紙の綴じは外さないこと。
- ④ 試験開始 60 分以降退室可。答案は間違いなく自分のクラスの回収場所へ提出すること。

問 1

xy 平面上の位置ベクトル $\vec{r}$ の大きさ r を 5 とし、 x 軸となす角 θ を $\pi/3$ とする。 xyz 軸のそれぞれの単位ベクトルを $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ とする。位置ベクトル $\vec{r}$ は、次式で表される。下記の問に答えよ。

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} = \frac{5}{2} \vec{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \vec{j}$$

- (1) 位置ベクトル $\vec{r}$ と単位ベクトル $\vec{i}$ の内積を求めよ。
- (2) 位置ベクトル $\vec{r}$ の方向余弦を求めよ。
- (3) 原点 O を始点とする xy 平面上のベクトル $\vec{A}$ （大きさ A は 5、 x 軸となす角 ϕ は $\pi/6$ ）がある。ベクトル $\vec{A}$ 方向の単位ベクトル $\vec{i}'$ を求めよ。
- (4) xy 平面上の位置ベクトル $\vec{r}$ をベクトル $\vec{A}$ に対して射影した長さを求めよ。
- (5) 位置ベクトル $\vec{r}$ が y 軸周りに角速度 ω で回転するとき、速度ベクトル $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ を求めよ。ただし、角速度ベクトルは $\vec{\omega} = \omega \vec{j} = 5 \vec{j}$ で表されるものとする。



問2

二次元極座標系での位置ベクトルは $\vec{r} = r\vec{e}_r$ あるいは $\vec{r} = r \cos \theta \cdot \vec{i} + r \sin \theta \cdot \vec{j}$ と表される。

ここで、 (r, θ) の基本ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_r$ 、 $\vec{e}_\theta$ とする時、以下の問に答えよ。

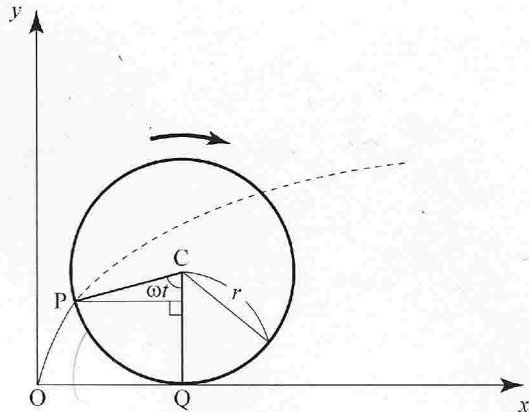
(1) 速度が $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ で与えられることを示せ。

(2) 加速度が $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ で与えられることを示せ。

(3) $\vec{r} = 100t^2 \cos t^3 \vec{i} + 100t^2 \sin t^3 \vec{j}$ であるとき、 $t = 1$ での速度および加速度の半径方向成分および周方向成分を求めよ。

問 3

図のように、 x 軸を地面とし、半径 r の車輪が、一定角速度 ω で回転しながら x 方向に直進している。車輪上の 1 点 P が原点に一致したときを $t=0$ とし、その後の点 P の軌跡を考える。



- (1) 時刻 t における点 P の x, y 座標をそれぞれ r, ω, t を用いて表せ。(ヒント: $OQ =$ 弧 PQ である)
- (2) 時刻 t における点 P の x 方向, y 方向の速度 v_x, v_y をそれぞれ求めよ。また、このときの点 P の速度の大きさ v_0 を求めよ。
- (3) 時刻 t における点 P の x 方向, y 方向の加速度 a_x, a_y をそれぞれ求めよ。また、このときの点 P の加速度の大きさ a_0 を求めよ。
- (4) 点 P が次に地面に接触する (x 軸上に接する) ときの時刻 t' を求めよ。また、その時の点 P の速度の大きさはいくらか。
- (5) $t=0$ から $t=t'$ までに点 P がたどった軌跡の長さ l を求めよ。

問 4

下図のように、区間長さ L で水平面より角度 θ ($0 < \theta < \pi/2$) だけ傾いた傾斜面 AB と、傾斜面 AB と滑らかに接続する半径 R ($R < L \tan \theta$) の円弧 BC がある ($0 < \phi < \pi/2 + \theta$)。質点が傾斜面 AB を移動する時には摩擦係数 μ ($\mu < \tan \theta$) の摩擦力が作用するが、円弧 BC を移動する時には摩擦力は作用しない。重力加速度は g とする。

今、A 地点に質量 m の質点を静かに置いた後の質点の運動について考える。質点は運動に伴い、傾斜面 AB あるいは円弧 BC から、大きさ N の反力を受けるものとする。

- (1) 質点が傾斜面 AB 上を運動する場合について考える。図のように質点を置いた位置を原点として x - y 座標をとる。 x 方向と y 方向の運動方程式を、反力 N を用いてそれぞれ求めよ。
- (2) (1) の運動方程式から、B 地点での質点速度 v を求めよ。
- (3) 次に、質点が円弧 BC 上を移動する場合を考える。今、質点の運動を一般的に解析するため、円弧 BC の半径は時間とともに変動すると考えることにする ($\dot{r} \neq 0$, $\ddot{r} \neq 0$)。図のように X - Y 座標を新たに設け、半径方向 (r 方向) と円周方向 (ϕ 方向) の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\phi$ とする。半径方向 (r 方向) と円周方向 (ϕ 方向) の運動方程式を、反力 N を用いてそれぞれ求めよ。
- (4) (3) の運動方程式で、円弧 BC の半径は時間によらず一定値 ($r = R$) とすれば、図の円弧 BC 上での質点の運動を解析できる。質点が円弧 BC から受ける反力 N を、円弧 BC 上を移動する質点の速度 $v (= R\dot{\phi})$ で表せ。
- (5) (4) と同様に、円弧 BC の半径を一定値 ($r = R$) とした運動方程式より、円弧 BC 上を移動する質点の速度 v を図の ϕ の関数で求めよ。

ここで $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \dot{\phi} \frac{d(v/R)}{d\phi} = \frac{v}{R} \frac{d(v/R)}{d\phi} = \frac{v}{R^2} \frac{dv}{d\phi}$ の関係式を利用せよ。

