No.	
Date.	. .

[illegible] ・[illegible] $K = \frac{1}{2}mv^2$ — ①

・[illegible] $U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ — ②

・[illegible] $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r}$ — ③

・Bohr–Sommerfeld [illegible] $n\lambda = 2\pi r$ — ④ $(n = 1, 2, \cdots)$

・de Broglie [illegible] $p = h/\lambda$ — ⑤

⑤より $p = h/\lambda = mv$ ∴ $v = \frac{h}{m\lambda}$

これを③に代入 $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m}{r}\cdot\frac{h^2}{m^2\lambda^2} = \frac{h^2}{mr\lambda^2}$

⇔ $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{h^2}{m\lambda^2}$ ∴ $r = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{m\lambda^2}{h^2} = \frac{Ze^2m\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$ — ⑥

④に⑥を代入 $\lambda = \frac{2\pi r}{n} = \frac{Ze^2m\lambda^2}{2\varepsilon_0 h^2}\cdot\frac{1}{n}$ ⇔ $\frac{1}{\lambda} = \frac{Zme^2}{2\varepsilon_0 h^2}\cdot\frac{1}{n}$

これから、[illegible] E_n は、

$E_n = K + U = \frac{1}{2}m\cdot\frac{h^2}{m^2\lambda^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{Ze^2m\lambda^2} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} - \frac{h^2}{m\lambda^2} = -\frac{h^2}{2m\lambda^2}$

$= -\frac{h^2}{2m}\cdot\frac{Z^2m^2e^4}{4\varepsilon_0^2h^4}\cdot\frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\cdot\frac{1}{n^2}$

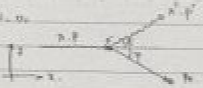
Rydberg const. は $R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}$ [illegible]

$E_n = -Z^2Rhc\cdot\frac{1}{n^2}$

∴ $n_1 \to n_2$ への[illegible] $E_{n_1} = E_{n_2} + h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

∴ $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}\cdot Z^2Rhc\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = Z^2R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$ //

No.
Date.



・散乱前後のX線の運動量は p, p'
・散乱後の電子の運動量 p_e
・電子の運動方向 φ

x方向の運動量保存　$p = p'\cos\theta + p_e\cos\varphi$ …①

y　〃　$0 = p'\sin\theta - p_e\sin\varphi$ …②

エネルギー保存　$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{(mc^2)^2 + p_e^2c^2}$ …③

①,②より φ を消去

$p_e^2 = p_e^2\cos^2\varphi + p_e^2\sin^2\varphi = (p - p'\cos\theta)^2 + p'^2\sin^2\theta = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta$ …④

③より　$(mc^2)^2 + p_e^2c^2 = \left(\frac{hc}{\lambda} + mc^2 - \frac{hc}{\lambda'}\right)^2$

$= \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 + (mc^2)^2 + 2\frac{hc}{\lambda}mc^2 - 2\frac{hc}{\lambda'}mc^2 - 2\frac{(hc)^2}{\lambda\lambda'}$

よって $p_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \frac{2mch}{\lambda} - \frac{2mch}{\lambda'} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}$

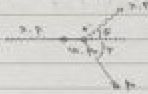
④に代入　ここで $p = h/\lambda$, $p' = h/\lambda'$ (∵ de Broglie)

$p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \frac{2mch}{\lambda} - \frac{2mch}{\lambda'} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}$

よって　$\frac{2mch}{\lambda} = \frac{2mch}{\lambda'} + \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta)$

両辺 $\times \frac{\lambda\lambda'}{2mch}$　$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ …

[illegible] p_e [illegible]



[illegible]

p [illegible] $= p'\cos\theta + p_e\cos\varphi$ — ①

[illegible]

$0 = p'\sin\theta - p_e\sin\varphi$ — ②

[illegible]

$\frac{ch}{\lambda} + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2} = \frac{ch}{\lambda'} + \sqrt{(mc^2)^2 + p_e'^2 c^2}$ — ③

①②より $p_e'^2 = (p - p'\cos\theta - p_e)^2 + p'^2\sin^2\theta$

$= p^2 + p'^2 + p_e^2 - 2pp'\cos\theta + 2p_e p'\cos\theta - 2p_e p$ — ④

③より $(mc^2)^2 + p_e'^2 c^2 = \left\{ \frac{ch}{\lambda} - \frac{ch}{\lambda'} + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2} \right\}^2$

$= \left(\frac{ch}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{ch}{\lambda'}\right)^2 + (mc^2)^2 + (p_e c)^2 - \frac{2(ch)^2}{\lambda\lambda'} - \frac{2ch}{\lambda'} mc^2\sqrt{1+p_e^2} + \frac{2ch}{\lambda} mc^2\sqrt{1+p_e^2}$

④より $p_e'^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + p_e^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta + \frac{2p_e h}{\lambda'}\cos\theta - \frac{2p_e h}{\lambda}$

$= \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + p_e^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} - \frac{2mch}{\lambda'}\sqrt{1+p_e^2} + \frac{2mch}{\lambda}\sqrt{1+p_e^2}$

[illegible] $2mch\left(p_e + \sqrt{1+p_e^2}\right)\frac{1}{\lambda} = 2mch\left(p_e\cos\theta + \sqrt{1+p_e^2}\right)\frac{1}{\lambda'} + \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$

[illegible] $\frac{\lambda\lambda'}{2mch\left(p_e + \sqrt{1+p_e^2}\right)}$ [illegible]

$\lambda' = \frac{p_e\cos\theta + \sqrt{1+p_e^2}}{p_e + \sqrt{1+p_e^2}}\lambda + \frac{h}{mc}\cdot\frac{1-\cos\theta}{p_e + \sqrt{1+p_e^2}}$ //

$p_e = 0$ [illegible]

No.
Date

問4 (1) Maxwell-Boltzmann の速度分布

「v が ... 速度 (v_x, v_y, v_z) が $(v_x+dv_x,\ v_y+dv_y,\ v_z+dv_z)$ の間にある確率は

$$f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_B T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

であるから（[illegible]）

ここで $v_x = v\sin\theta\cos\varphi,\ v_y = v\sin\theta\sin\varphi,\ v_z = v\cos\theta$ の極座標に変換すると、

$$f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^2 \sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$$

ここで θ を $0 \to \pi$、φ を $0 \to 2\pi$ で積分

$$g(v)\,dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\ v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv \quad //$$

ここで $A = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}$ とおく

(i) $\bar{v} = \int_0^\infty v\,g(v)\,dv = A\int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = -\frac{k_B T}{m} A \int_0^\infty v^2 \left\{\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\right\}' dv = \frac{k_B T}{m} A \int_0^\infty 2v \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$

$= -2\left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 A \left[\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\right]_0^\infty = 2\left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 A = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad //$

(ii) $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 g(v)\,dv = A\int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = -\frac{k_B T}{m} A \int_0^\infty v^3 \left(\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\right)' dv$

$= -\frac{k_B T}{m} A \left[v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\right]_0^\infty + \frac{k_B T}{m} A \int_0^\infty 3v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$

$= \frac{3k_B T}{2m} A \int_{-\infty}^\infty v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = \frac{3k_B T}{2m} A \cdot \frac{k_B T}{m} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$

$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{3k_B T}{m} \quad //$

$\therefore E = \frac{1}{2} m \cdot \frac{3k_B T}{m} = \frac{3}{2} k_B T \quad //$

(内部の気体が[illegible])

問5. 

容器上面における圧力を P_T、下面における圧力を P_B とすると
容器内の気体の重さ（質量）は
$\frac{(P_B - P_T)S}{g}$ と表される。

・Maxwellの速度分布則 $f(v_x, v_y, v_z) = \boxed{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right\}$ を使う。

(i) 下面について、壁に与える力積：$2mv_z$
単位時間・単位面積あたりに壁にぶつかる粒子数：$nv_z f$

∴ $P_B = 2mn\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\int_{-\infty}^{0}dv_z\, v_z^2 f$ （∵ $v_z<0$）

(ii) 上面について、分子の速度は壁にぶつかるまでに重力により小さくなるので、$v_z^2 > 2gh$ という条件が必要となる。
単位時間・単位面積あたりに壁にぶつかる粒子数：$nv_z f$
また、壁にぶつかる瞬間の速度を v_z' とおくと、エネルギー保存則より
$\frac{1}{2}mv_z'^2 = \frac{1}{2}mv_z^2 - mgh$

より $v_z' = \sqrt{v_z^2 - 2gh}$。∴ 壁に与える力積：$2m\sqrt{v_z^2-2gh}$
ここで、hが小さいとして近似すると、
$2m\sqrt{v_z^2-2gh} = 2mv_z\sqrt{1-\frac{2gh}{v_z^2}} \simeq 2mv_z\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\frac{gh}{v_z^2}\right) = 2mv_z\left(1-\frac{gh}{v_z^2}\right)$

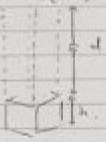
∴ $P_T = 2mn\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\int_{0}^{\infty}dv_z\, v_z^2\left(1-\frac{gh}{v_z^2}\right)f = 2mn\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\int_{0}^{\infty}dv_z\,(v_z^2-gh)f$
（∵ $v_z>0$）

(i),(ii)より $P_B - P_T = 2mn\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\int_{-\infty}^{\infty}dv_z\,\frac{1}{2}ghf$

$= mnghA\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dv_z\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)$

$= mnghA\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} = mngh$

∴ 気体の質量は $\frac{mnghS}{g} = mnhS$



問6 は 問5と同様に考えればよい。
粒子の上にある気体の質量を求めるとよいので、下面から高さ[illegible]
[illegible] (i), (ii) のように計算すれば
$P_B - P_T = mng(d+h-d)\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\int_{-\infty}^{\infty}dv_z f = mngh$ となる。

∴ 質量は $mnhS$