問題２

(1) 略

(2) (1) と同様に、余計な文字はなるべく置かない方針で、衝突後の電子のエネルギーを E、電子の散乱角を図のように ϕ とする。

エネルギー保存

$$\frac{hc}{\lambda}+\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}=\frac{hc}{\lambda'}+E \tag{1}$$

運動量保存

$$\frac{h}{\lambda}-\frac{mc\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2}\cos\phi \tag{2}$$

$$\frac{h}{\lambda}\sin\theta=\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2}\sin\phi \tag{3}$$

あとは式 (1),(2),(3) から ϕ, E を消去して、λ' を求めれば終わり。

まず (2),(3) より ϕ を消去して

$$\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2=(\frac{h}{\lambda}\sin\theta)^2+(\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+\frac{mc\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}-\frac{h}{\lambda})^2 \tag{4}$$

また、(1) より (E を消去したいから)

$$\frac{E^2}{c^2}\quad=(\frac{h}{\lambda'}-\frac{mc}{\sqrt{1-\beta_0^2}}-\frac{h}{\lambda})^2 \tag{5}$$

あとは (4)-(5) でもして E を消去して、λ' について整理すれば

$$\lambda'=\frac{1+\beta_0\cos}{1+\beta_0}\lambda+\frac{h}{mc}\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}(1-\cos\theta) \tag{答え}$$