物理学演習 II(中間テスト)　　2008 年 12 月 3 日

【1】

ハミルトニアン $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \gamma qp$ (γ: 正の定数) によって記述される 1 次元系を考える。

1. 正準方程式の解を求めよ。
2. 位相空間において、$t = 0$ で円 $q^2 + p^2 = d^2$ (d: 正の定数) 上にある点は、時間の経過とともにどのような曲線上に移るかを示せ。
3. 2 で求めた曲線で囲まれた領域の面積は時間が経過しても変化しないことを示せ。
4. $D = f(q,p) - Ht$ がこの系の一つの運動の定数としたとき、関数 $f(q,p)$ を求めよ。
5. 定数 γ を純虚数 ic にすると、この系の運動が一次元調和振動子 : $H(Q,P) = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}mc^2Q^2$ と等価であることを説明せよ。(ただし、1 で求めた解を明示的に使って答えてはいけない。)

【2】ここでは磁場下の電子系の Hall 効果と磁気光学効果について考察する。

1980 年に Klitzing 等により、強磁場中の二次元電子系で Hall 伝導率が e^2/h の整数倍に量子化されるという驚くべき現象が発見された．この現象は量子 Hall 効果と呼ばれ、二次元系において磁場中を不純物の散乱を受けながら運動する電子の量子力学的効果として理解されている．ここでは古典的な電子の運動による Hall 効果を考えてみよう．

1. xy 平面上を運動する電子を考え、時刻 t での電子の位置を $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ とおく．x 方向に電場 $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$、$z$ 方向に磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ が働いているときの電子の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -e\boldsymbol{E} - e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

で与えられる．ここで m は電子の質量、$-e$ は電荷であり、$E,\ B$ は時間によらない。この時、初期条件 $x(0) = y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0,\ \dot{y}(0) = 0$ として電子がどのような運動をするか説明せよ．$\omega_c = eB/m$ とおいてよい．

2. 一般に物質中で電子は不純物によって散乱されながら運動すると考えられる．その効果を摩擦力 $-\gamma\dot{\boldsymbol{r}}$ として扱うと、運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} = -e\boldsymbol{E} - e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} \tag{2}$$

となる．十分時間が経過した後、電子の速度がある一定の値 $\boldsymbol{v}_f$ になったとして、$\ddot{\boldsymbol{r}} = 0$ とおくことにより $\boldsymbol{v}_f = (v_{fx}, v_{fy})$ を求めよ．$\tau = m/\gamma$ とおいてよい．

3. 初期条件 $x(0) = y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0,\ \dot{y}(0) = 0$ のもとで (2) を解け．電子がどのような運動をするか説明せよ．

4. 電子の密度 n の二次元電子系を考え、x 方向に電場 E をかけて電流を流す．物質中の電子の運動は (2) で記述されるものとして、十分時間が経過した後の物質中を単位面積当たり流れる電流密度 $(j_x,\ j_y)$ と電場 E の関係は Ohm の法則

$$j_x = \sigma_{xx}E, \quad j_y = \sigma_{xy}E$$

に従う．縦伝導率 σ_{xx} と Hall 伝導率 σ_{xy} を求めよ．

次に静磁場下の誘電体に電磁波を照射した時の電子の運動について考察する．

5. 誘電体中では電子は原子核に束縛されている．ここでは調和振動子ポテンシャルを用いて束縛力を表現し、次の運動方程式によって記述される系を考える．

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} + m\omega_0^2\boldsymbol{r} = -e\boldsymbol{E} - e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} \tag{3}$$

x-方向に偏光した電磁波 $\boldsymbol{E} = (E(t), 0, 0),\ E(t) = E_0\cos(\omega t)$ を仮定し、磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ は定数とする．この時電子はどのように運動するか説明せよ．

なお、この時、透過・反射波において入射した電磁波の偏光面は回転すること (磁気光学効果) が知られており MO などの記憶媒体の動作原理として応用されている。