解析力学・量子力学I 試験問題考察

2. (V)

$$H = p\dot{\theta} - L$$

$$\left(p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mr^2\dot{\theta}(1-\cos\theta) \iff \dot{\theta} = \frac{p}{2mr^2(1-\cos\theta)} \right)$$

$$= mr^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) + mgr(1-\cos\theta)$$

$$= \cancel{mr^2(1-\cos\theta)}\frac{p^2}{4m^2r^4(1-\cos\theta)^2} + mgr(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{p^2}{4mr^2(1-\cos\theta)} + mgr(1-\cos\theta).$$

いま，$\theta \ll 1$ の場合を考える。

（一見 Hamiltonian の第1項が発散してしまう気がするが，$\theta \to 0$ で $\frac{p^2}{1-\cos\theta} \to \frac{0}{0}$ 極限となり，$2mgr$ に収束する。）

$1-\cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$，$\sin\theta \simeq \theta$ とすると，

$$H = \frac{p^2}{2mr^2\theta^2} + \frac{mgr}{2}\theta^2$$

いま，正準方程式を考えるが，H が $\theta=0$ において偏微分不可能なので，$\theta \neq 0$ として考える。（$\theta=0$ は別扱い）

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{p}{mr^2\theta^2} & \cdots ① \\ \dot{p} = \dfrac{p}{mr^2\theta^3} - mgr\theta & \cdots ② \end{cases}$$

いま，②に①を代入すると，

$$2m^2r^4\theta^4\dot{\theta}^2 + m^2r^4\theta^5\ddot{\theta} = m^2r^4\theta^4\dot{\theta}^2 - m^2r^3g\theta^4$$

$$\iff r\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} = -g \quad (\because \theta \neq 0)$$

$$\iff \frac{d}{dt}(r\theta\dot{\theta}) = -g$$

$$\iff r\theta\dot{\theta} = -gt + C$$

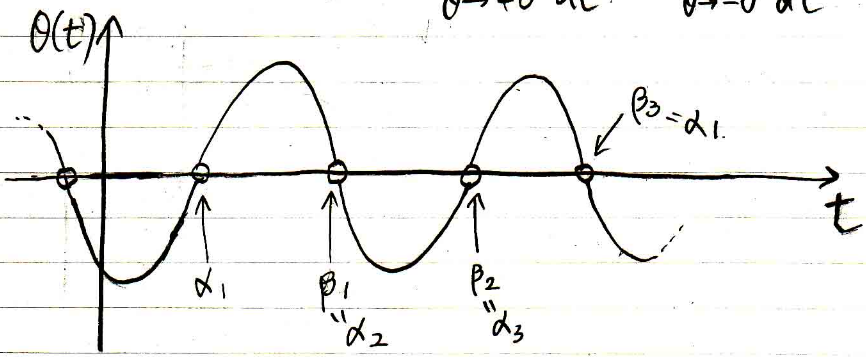
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{r\theta^2}{2}\right) = -gt + C$$

(ただし C, D, α, β は初期条件で決まる任意定数)

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{r}{2}\theta^2 = -\frac{g}{2}t^2 + Ct + D$$

$$\Longleftrightarrow \quad \theta(t) = \pm\sqrt{-\frac{g}{r}t^2 + C't + D} \equiv \pm\sqrt{-\frac{g}{r}(t-\alpha)(t-\beta)}$$

この解曲線を $\lim_{\theta\to+0}\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\theta\to-0}\frac{d\theta}{dt}$ となるように選ぶと、



(下付き数字が変わっているところでは、初期条件をとり直している。(不連続だから))

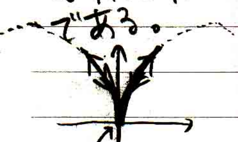
図から明らかなように、$\theta=0$ となる点は"除去可能な特異点"となる。

よって、本来 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ では θ は定義されないが、

$\theta(\alpha_1)=\theta(\alpha_2)=\cdots\theta(\alpha_n)=\cdots=0$ と定義すれば $\theta(t)$ は微分可能となり、物理学的に意味のある解となる。

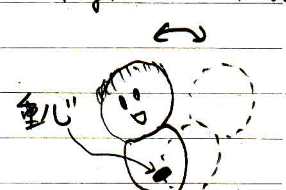
$$\theta(t) = \begin{cases} -\sqrt{-\frac{g}{r}(t-\alpha_0)(t-\beta_0)} & (\alpha_0<t<\beta_0) \\ 0 & (t=\beta_0=\alpha_1) \\ \sqrt{-\frac{g}{r}(t-\alpha_1)(t-\beta_1)} & (\alpha_1<t<\beta_1) \\ 0 & (t=\beta_1=\alpha_2) \\ -\sqrt{-\frac{g}{r}(t-\alpha_2)(t-\beta_2)} & (\alpha_2<t<\beta_2) \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad \cdots(答)$$

(注) 質点の軌跡はサイクロイドである。



特異点

Fig1. おきあがりこぼし



これを実用化したおもちゃに、"起きあがりこぼし"がある。

起きあがりこぼしは、特異点の周りを振動しているのである。(終)