解析力学・量子力学Ⅰ 中間試験

担当教員：常行真司

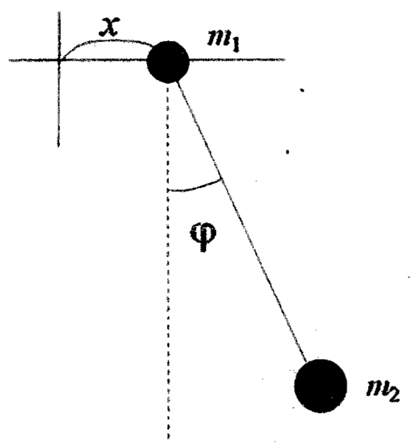
（実施：平成 21 年 11 月 30 日）

1．　質量 m_2 の単振子の支点が質量 m_1 の質点で、水平方向になめらかに運動できるとする。2 つの質点の運動は同一の 2 次元鉛直面内のみに限定し、重力加速度は g として、次の問いに答えよ。

(1) 図の x と φ を一般化座標として、ラグランジアンを求めよ。

(2) オイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。

(3) x と φ に共役な一般化運動量を p_x, p_φ として、ハミルトニアンを $x, \varphi, p_x, p_\varphi$ を使って表わせ。



2．　自然長 l、バネ定数 k の軽いバネに質量 m の質点をつるす。鉛直方向からのばねの傾きをθ、バネの長さ（自然長＋のび）を r として、r とθに関する運動方程式を求めよ。なお、質点の運動は 2 次元鉛直面内のみに限定してよい。重力加速度は g とする。

3．　質量 m の質点の座標を極座標 (r,θ,φ) で表わす。この質点が中心力ポテンシャル $U(r)$ のもとで運動するとき、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2\right\} - U(r)$$

と表わされる。このとき以下の問いに答えよ。

(1) r, θ, φ に共役な運動量 p_r, p_θ, p_φ を、$r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ で表わせ。

(2) この系のハミルトニアンを求めよ。

(3) $F \equiv p_\theta^2 + \dfrac{p_\varphi^{\ 2}}{\sin^2\theta}$ が保存量であることを示せ。

量子力学I　試験問題
試験時間：120分

上田正仁

2010 3. 1.

問題 [1] から [4] に解答せよ。**ただし、以下の注意事項を厳守すること。**

1. 解答用紙は両面使ってよいが、必ず１枚で解答せよ。（２枚以上使わないこと）

2. 全ての設問について h や m 等を省略する特殊な単位系、略記法等を用いず、すべて明記せよ。

3. 問題に不備、条件不十分な点等があると思われる場合は、どの点をどのように修正、解釈したかを明記した上で、その修正、解釈の下で解け。

★不合格者のリスト、及び追試（レポート課題）の情報は３月５日までには下記の講義ホームページで公表しますので、必ずご確認ください。追試課題の提出締め切りは３月12日頃の予定です（詳しくはホームページをご覧下さい）。http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/QM_1_09/QM_1_09.html

[1]

(1) 以下の $\boxed{\text{A}}$ から $\boxed{\text{D}}$ に適切な語句・数字を埋めろ。

・量子力学を特徴づける普遍定数 h として $\boxed{\text{A}}$ と呼ばれる量があり、MKSA 単位系でこの定数の具体的な値は**単位も含めて有効数字１桁**で $h = \boxed{\text{B}}$ である。

・古典的な粒子を特徴づける量として運動量 p、エネルギー $E = \frac{p^2}{2m}$ がある。一方、波を特徴付ける量として、波数 k、振動数 ν がある。量子力学で有名なド・ブロイの関係式はこれらの量を $p = \boxed{\text{C}}$、$E = \boxed{\text{D}}$ と関係づけており、粒子性と波動性の二重性を表している。

(2) 以下の (a) から (g) までのうち正しいものをすべて選べ。

(a) 波動関数は必ず連続だが、その微分は連続でない場合もある。

(b) 波動関数を $\Psi(x)$ とすると、[x,x+dx] の区間で粒子が観測される確率は $|\Psi(x)|^2dx$ であり、この確率分布に従って粒子の観測位置は確率的にに分布する。

(c) ２つの波動関数 $\Psi_0(x),\Psi_1(x)$ 同士の内積は、０か１の値のみとる。

(d)$\Psi_0(x)$ と $\Psi_1(x)$ が定常状態の Schrödinger 方程式の解であるならば、その線形結合も定常状態の Schrödinger 方程式の解である。

(e) コペンハーゲン解釈によると、波動関数が観測者によって測定されると波動関数は収縮する。よって観測前は $\Psi(x)$ だった波動関数が、位置 x_0 で粒子が観測された後では x_0 のみにゼロでない値をもつ波動関数へと収縮する。

(f) 高さ V_0 のポテンシャル障壁があるとし、この障壁に向かってエネルギー $E < V_0$ の粒子が１つ入射してくる場合を考える。古典力学に従う粒子の場合完全に反射するのだが、量子力学に従う粒子においては、一般には反射成分もあるが透過成分も存在する。

(g) 図１のような電子に対する量子力学的な電子に対する Young の干渉実験を考える。量子力学に従う電子を１つづつ、下図のようにダブルスリットに入射させたとする。するとスクリーン上には粒子として検出された一様に確率分布した離散的な点と、波の性質由来の連続的な干渉縞の２つが重ね合わさったものが、粒子性、波動性の二重性ののためうつる。

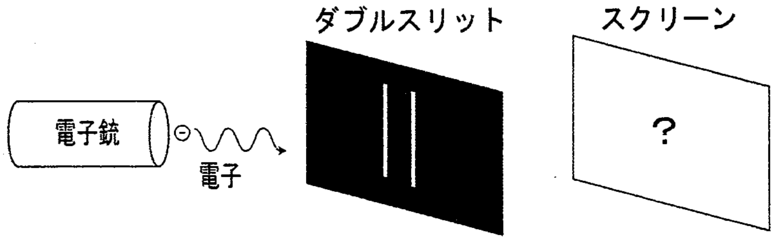


図 1: 電子に対する Young のダブルスリット実験。

[2] 以下の問いの答えよ。
(1)Hermite 演算子の固有値が実数であることを示せ。
(2) 水素原子のまわりをまわる電子が、電磁波を放出して中心へ落下してしまわないのはなぜかを、数行程度で説明せよ（数式を用いても良い）。

[3] 定常状態の 1 次元 Schrödinger 方程式について以下の無限井戸ポテンシャル中での波動関数を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \infty \ (x < 0 \ or \ x > L) \\ 0 \ \ (0 < x < L) \end{cases}$$

(1) 固有関数 $\phi_n(x)$ と固有値 E_n をすべて、規格化も含めて求めよ。
(2) 異なる固有関数同士が互いに直交することを確かめよ。
(3) 上の (1) で求めた固有関数たちが完全性関係

$$\sum_n \phi_n(x)\phi_n(y) = \delta(x-y)$$

を $0 < x < L$、$0 < y < L$ の領域で満たすことを示せ。必要であれば以下に示した Poisson の和公式を利用せよ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-inx)$$

[4] 1 次元の調和振動子を、以下の生成、消滅演算子を用いて解くことを考える。

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \end{aligned}$$

(1) この生成消滅演算子を用いて、調和振動子の Hamiltonian が以下のように表せることを示せ。

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

(2)a と $a^\dagger$ の交換子を求めよ。
(3) エネルギー E_n の固有状態 $|n>$ に a を作用させた $a|n>$ も、$a^\dagger$ を作用させた $a^\dagger|n>$ もエネルギー固有状態であることを示せ。またそれぞれのエネルギー固有値を E_n を用いて表せ。
(4) 基底状態が $a|0>= 0$ を満たす状態であることを示せ。また基底状態のエネルギーを書け。