物理学演習II(期末テスト)　　2009年1月28日

【1】半直線上に一個の粒子 (質量は m) がある系を考える。粒子は $x > 0$ で自由に運動できるが、$x = 0$ の量子壁によって全反射するとする。

(1-1) 自由粒子のハミルトニアンは $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ であるが、考えている領域で H がエルミート性を持ち、かつ粒子の確率が保存することを要請すると、$x = 0$ での波動関数 $\psi(x)$ に対する境界条件として一般に

$$\psi(0) + L\psi'(0) = 0 \tag{1}$$

という形になることを示せ。ただし、$\psi(x)$ は2乗積分可能な関数とし、$\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ で L は無限大 ($L = \infty$) も含む実数とする。

(1-2) 正エネルギーの状態 (波数 $k > 0$) に対する波動関数は、波数 k の左に進行する入射波 $\psi_{\rm in}(x) \propto e^{-ikx}$ と右に進行する反射波 $\psi_{\rm out}(x) \propto e^{i\delta}e^{ikx}$ の線形結合として

$$\psi(x) = \psi_{\rm in}(x) + \psi_{\rm out}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-ikx} + e^{i\delta}e^{ikx}\right) \tag{2}$$

のように与えられる。第二項の位相因子 $e^{i\delta}$ は反射に付随する位相のずれを表すが、問1で求めた境界条件 (1) の下で具体的に求めよ。

(1-3) 次にエネルギーの期待値が、同じ境界条件 (1) の下で

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{L^2}\int_0^\infty dx|\psi(x) + L\psi'(x)|^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{L^2} \tag{3}$$

となることを示せ。(ただし、$\langle H\rangle \equiv \int_0^\infty dx\psi^*(x)H\psi(x)$)

(1-4) $L > 0$ のとき式 (3) より最低エネルギーを求めよ。また、そのとき波動関数の満たすべき条件から、この最低エネルギーの状態がどのような状態になるか説明せよ。

式 (2) において位相因子 $e^{i\delta}$ は反射に付随する位相のずれであった。問2で求めた位相のずれが、入射と反射の量子的な時間のずれを生むことをみるために、以下のような波束状態を考える。

$$\Psi(x,t) = \int_0^\infty dk g(k)\psi(x)e^{-iEt/\hbar}e^{ikx_0} = \Psi_{\rm in}(x,t) + \Psi_{\rm out}(x,t)$$

ここで $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$ で、$\psi(x)$ は式 (2) で与えられるものとする。また、重み関数 $g(k)$ は $k = k_0 > 0$ で極大となる、つまり $\frac{dg}{dk}|_{k=k_0} = 0$ を満たすものとする。このようにして作った波束は $x = x_0$ から速度 $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$ で入射した粒子が $x = 0$ で反射する古典的な運動に対応する。

(1-5) それぞれ入射波束 $\Psi_{\rm in}$ と反射波束 $\Psi_{\rm out}$ の k 積分の停留位相（被積分関数の指数部が極小）の条件から入射粒子と反射粒子の古典的な運動（粒子の位置の時間変化）を求めよ。

(1-6) 問5の結果から、右から入射された粒子が $x = 0$ に到達した時間 $t_{\rm in}$ と反射粒子が $x = 0$ から右へ反射される時間 $t_{\rm out}$ の時間差

$$\Delta t = t_{\rm out} - t_{\rm in}$$

を求め、$\Delta t = 0$ となるのがどのようなときか述べよ。

【2】電子の波としての性質を顕著に表す実験として２重スリットを通過した電子線の干渉現象がある（図１）。この実験では電子線源から出た電子は間の２つのスリットを量子力学的に同時に通過し距離 L 離れたスクリーン上に輝点として観測される。電子の波動関数は時間依存シュレディンガー方程式 $i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\psi(x,t)$ によって記述されるとして、観測される電子の分布について考察する。なお、電子の質量を m とし、$\hbar = 1$ とおく。また、スリットの間隔を d とせよ。

（ヒント）１次元の場合、フーリエ (逆) 変換は $\phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-ipx}dx$、$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p,t)e^{ipx}dp$ で与えられ、ガウス積分は a の実部が正の時 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x-b)^2}dx = \sqrt{\pi/a}$ である。２次元に拡張して用いよ。

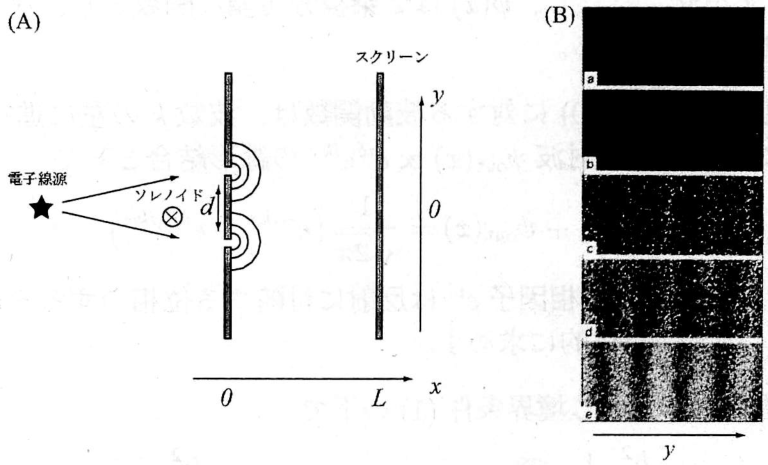

図 1: (A)2 重スリット実験 (B) スクリーン上の輝点。下に行くほど多くの電子が通過している。

(2-1) 波動関数のフーリエ成分 $\phi(\vec{p},t)$ に対して時間依存シュレディンガー方程式を書き下せ ($\vec{p} = (p_x, p_y)$)。また、初期状態が $\phi(\vec{p}, t=0) = \phi(\vec{p})$ の時の解を与えよ。

(2-2) 座標 (x_0, y_0) を中心とする幅 R の波束 $\varphi_{(x_0,y_0)}(\vec{x}) = Ce^{-\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}/R^2}$ の規格化定数 C を求めよ。

(2-3) 波束 $\varphi_{(x_0,y_0)}(\vec{x})$ のフーリエ変換 $\phi_{(x_0,y_0)}(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\varphi_{(x_0,y_0)}(\vec{x})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\cancel{dx}$ を求めよ。

(2-4) スリットが一つだけ開いている場合にスクリーン ($x = L$) に観測される電子の確率分布 $|\psi(\vec{x},t)|^2$ を求めよ。ただし、空いているスリットの位置を $(0, d/2)$ とし、時刻 $t = 0$ での電子の波動関数 ψ が $\psi(\vec{x}, t=0) = \varphi_{(0,d/2)}(\vec{x})$ で与えられると仮定せよ。

(2-5) スリットが二つ開いていて初期状態が $\psi(\vec{x}, t=0) = \varphi_{(0,d/2)}(\vec{x})/\sqrt{2} + \varphi_{(0,-d/2)}(\vec{x})/\sqrt{2}$ で与えられる場合を考える。この時スクリーン上に干渉パターンが現れることを示せ。また、その間隔を求めよ。

(2-6) スリットの左側のソレノイドに磁場をかける。磁場によって初期状態に位相が $\psi(\vec{x}, t = 0) = e^{i\Phi/2}\varphi_{(0,d/2)}(\vec{x})/\sqrt{2} + e^{-i\Phi/2}\varphi_{(0,-d/2)}(\vec{x})/\sqrt{2}$ のようになると仮定する。この位相はスクリーン上の干渉パターンにどのような効果を及ぼすか？