

物理数学 I 2008 年度 冬学期 期末試験

10:40 - 12:10 am, 4 March 2009

以下の 4 問を、各問毎に別の回答用紙に解答せよ。

問 1 (a) e^z という複素関数を、冪級数として定義し、その収束半径を求めよ。

(b) e^z の逆関数として対数関数 $\log z$ を定義したとき、この関数を例として用いながら、Riemann 面について説明せよ。

問 2 (a) 正則関数の実部、虚部は、それぞれ Laplace 方程式を満たすことを示せ。

(b) $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ という複素積分を用いて、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。ここで、 C は積分経路、 x は実数。

問 3

ガンマ関数を $\Gamma(z)$ と表わしたとき、

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} du \frac{u^{z-1}}{1+u} \quad (1)$$

(ただし、 $0 < x = \operatorname{Re} z < 1$) は与えられたものとして、以下に答えよ。

(a) u を複素変数としたときの複素関数 $\frac{u^{z-1}}{1+u}$ の特異性について述べよ。

(b) 上式右辺の積分を、留数の方法によって求めるとすると、どのような積分経路をとればよいか、理由を添えて述べよ（積分は実行しなくてよいが、極の位置と留数の値は言及せよ）。

問 4

直交関数系 $\{\varphi_n\}$ が complete とはどういうことか説明せよ。