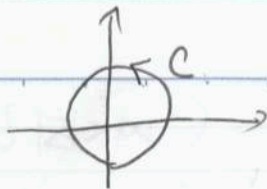


問題 1



$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - (z + \frac{1}{z}) + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})}$$

$$z = e^{i\theta} \text{ かつ } dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

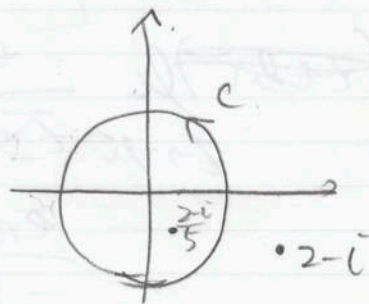
$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

$$= -i \int_C \frac{dz}{3z - (z^2 + 1) + \frac{1}{2i}(z^2 - 1)}$$

$$= -2 \int_C \frac{dz}{(1-2i)\{z-(2-i)\}\{z-\frac{2-i}{5}\}}$$

部分分数分解の公式

$$\text{Res}\left(\frac{2-i}{5}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \frac{1}{(1-2i)\{z-(2-i)\}^2}$$



$$= \frac{1}{(1-2i)} \cdot \frac{1}{-\frac{2-i}{4}}$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{-5i}$$

$$= -\frac{4}{5}i$$

$$\therefore (5\text{式}) = 2 \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{4}{5}i\right)$$

$$= \frac{16}{5}\pi \quad \dots (6)$$

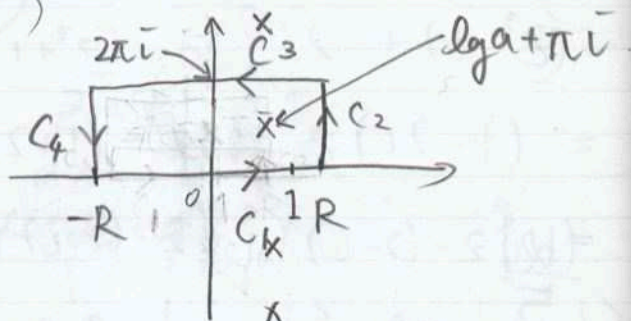
$$e^z + a = 0$$

$$e^z = -a$$

$$z = \lg a + i(2m+1)\pi$$

$$(b) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{a + e^x} dx \quad (0 < a < 1)$$

$$J = \int_C \frac{e^{az}}{a + e^z} dz \quad \text{z 対 c}$$



$$C_1: \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{a + e^x} dx \rightarrow I \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$C_3: \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{a + e^{(x+2\pi i)}} dx$$

$$= \int_{-R}^R \frac{-e^{ax} e^{2\pi ai}}{a + e^x} dx \rightarrow -e^{2\pi ai} I$$

$$C_2: \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+yi)}}{a + e^{(R+yi)}} i dy \quad \left(\begin{array}{l} z = R + yi \\ dz = i dy \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{ayi}}{\frac{a}{e^{aR}} + e^{(1-a)(R+yi)}} i dy \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\left(\text{①} \quad \left| \int_{C_2} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left| \frac{a}{e^{aR}} \right| - |e^{(1-a)}|} |dy| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \right)$$

- ① 被積分関数が z に対して $z \rightarrow \infty$ のとき
- ② 評価した積分の計算結果が //

$$C_f: \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{a + e^{(-R+iy)}} dy \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\left(\textcircled{1} \int_{2\pi}^0 \left| \frac{e^{a(-R+iy)}}{a + e^{(-R+iy)}} \right| |dy| \leq 2\pi \frac{e^{-Ra}}{a - e^{-R}} \rightarrow 0 \right) \quad (R \rightarrow \infty)$$

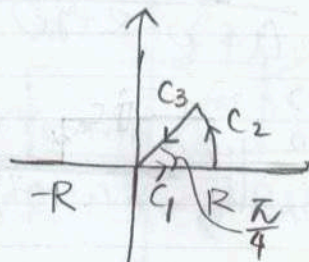
$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) e^{az}}{a + e^z} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{az} \{1 + (z - z_0)a\}}{e^z} \\ &= \frac{a^a e^{a\pi i}}{-a} \end{aligned}$$

) のとき
 なるべく累乗は
 $e^{\textcircled{1}}$ の形に
 しておく
 ために便利

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\pi ai}) I &= -2\pi i a^{a-1} e^{\pi ai} \\ \Leftrightarrow I &= \frac{2\pi i a^{a-1} e^{\pi ai}}{e^{2\pi ai} - 1} \\ &= \frac{2\pi i a^{a-1}}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} \pi a^{a-1} \\ &= \frac{\pi a^{a-1}}{\Lambda(\pi a)} \dots \left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(c) I = \int_{-\infty}^{\infty} A x^2 dx$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz \quad \text{L.H.S.}$$



$$C_1: \int_0^R e^{ix^2} dx = \int_0^R \cos x^2 dx + i \underbrace{\int_0^R A x^2 dx}_{\rightarrow \frac{I}{2} \quad (R \rightarrow \infty)}$$

$$C_2: \int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{i\theta})^2} i R e^{i\theta} d\theta$$

$$= i R \int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2\theta + i A \sin 2\theta)} e^{i\theta} d\theta$$

$$= i R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 A \sin 2\theta} e^{i(R^2 \cos 2\theta + \theta)} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\left(\text{Clockwise} \right) \left| \int_{C_2} \right| \leq i \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 A \sin 2\theta} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$C_3: \int_R^0 e^{i(re^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4} dr \quad (z = re^{i\pi/4})$$

$$= \int_R^0 e^{-r^2} e^{i\pi/4} dr$$

$$= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr \rightarrow -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

∴ コーシーの積分定理から, $R \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx - e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

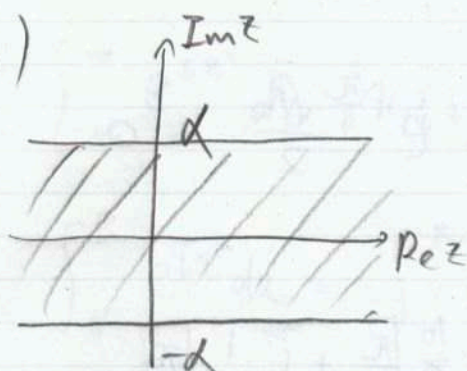
$$\therefore \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \dots (7)$$

($\because \sin x^2$ は偶関数)

問題2

(a)



$$w = f(z) = g(\zeta) \text{ とする。}$$

$$\zeta = e^{iz} \Leftrightarrow iz = \log |\zeta| + i(\arg \zeta + 2n\pi)$$

$$\Leftrightarrow z = -i \log |\zeta| + (\arg \zeta + 2n\pi)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

よって, $z_0 \in D$ を用いて $\zeta_0 = e^{i(z_0 + 2n\pi)}$ と表すことに

すると, ζ_0 に対応する z_0 には $2n\pi$ の不定性があるから,

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} = \lim_{z \rightarrow z_0 + 2n\pi} \frac{f(z) - f(z_0 + 2n\pi)}{z - (z_0 + 2n\pi)}$$

$$= f'(z_0 + 2n\pi)$$

$$= f'(z_0)$$

2) f の周期性より

となり, 確かに一価正則である。 $\square$

(b) $g(\zeta)$ は $-\alpha < \log \frac{1}{|\zeta|} < \alpha$ 7

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha} < \frac{1}{|\zeta|} < e^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha} < |\zeta| < e^{\alpha} \quad \text{のとき正則であるから,}$$

この領域に $\zeta=0$ のまわりの Laurent 展開すると,

$$W = g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n \quad \dots (1)$$

$$\text{ただし } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad \dots (2)$$

いま Γ_1 を単位円とすると, $\zeta = e^{ix}$ とおくと, $d\zeta = ie^{ix} dx$

$$\textcircled{1} : W = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} : C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(xn+1)}} ie^{ix} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

となり, 実数関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を得る。 17

