物理学演習 I　中間試験　2009 年 11 月 12 日

物理数学と電磁気学で解答用紙をわけること。

（物理数学）

問題 1

次の定積分を求めよ。但し、ある積分路 C_R 上、$R \to \infty$ で積分が消えるといったことを用いる場合には、その根拠（或いは判定条件）を簡潔に示すこと。

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

$$\text{(b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx \quad (0 < a < 1)$$

$$\text{(c)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin x^2$$

ただし、$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ は既知として用いてよい。

ζ, $e^{y} e^{ix}$

問題 2

関数 $f(z)$ が領域 $D: -\alpha < \mathrm{Im}\, z < \alpha \ (\alpha > 0)$ で一価正則で $f(z + 2\pi) = f(z)$ を満たすとする。

(a) $\zeta = e^{iz}$ とすると、$w = f(z)$ は ζ の関数としても一価正則であることを示せ。

(b) w を ζ で Laurent 展開することにより、実軸上 $(z = x)$ で

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

とあらわせることを示せ。

(裏に続く)

（電磁気学）

問題 1

３次元空間において、点 $\vec{r_0}$ に置かれた電荷 q が作る電位ポテンシャル

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}$$

に対し、

(a) $\nabla^2\phi(\vec{r})(\vec{r} \neq \vec{r_0})$ を計算せよ。

(b) $\vec{r_0}$ を囲む任意の半径 ϵ の球の領域 V での体積積分

$\int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\cdot dV = \int_{\partial V} \vec{E}\, dS$

$$\int_V \mathrm{d}\vec{r}\,\nabla^2\phi(\vec{r})$$

を求めよ。

$\nabla\cdot\vec{r}$ $\quad \nabla\cdot\phi = \vec{E}$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \nabla$

問題 2

静止座標系 K 系から見て x 軸方向に速度 $\vec{V} = (V, 0, 0)$ で運動している慣性系 K' 系では点電荷 q が静止しているとする。K' 系での電磁ポテンシャルをローレンツ変換することにより、K 系での電位ポテンシャル ϕ とゲージポテンシャル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ が、

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}} \\ A_x = \frac{\gamma\beta q}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}} \\ A_y = A_z = 0 \end{cases}$$

のように得られたとする。ここで $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$、$\beta = \frac{V}{c}$($c$ は光速) であり、$(Vt, 0, 0)$ は点電荷が時刻 t にいる座標を表す。

(a) 電場を与える公式 $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ から電場を求めよ。

(b) 適当な閉曲面 S を考えることにより、ガウスの定理

$$\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{xyz\,\mathrm{on}\,S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,E_z + \int_{xyz\,\mathrm{on}\,S}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,E_x + \int_{xyz\,\mathrm{on}\,S}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,E_y = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

から K 系で観測される「電荷 Q」を求めよ。

物理数学 I　2009 年度 冬学期 期末試験

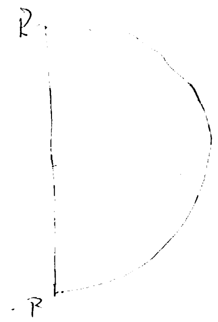
1-2:30 pm, 19 November 2009

以下の 3 問を、各問毎に別の解答用紙に解答せよ。
各用紙に、名前、学生証番号、学科名、学年を記入せよ。

問 1　**(a)** Riemann 面を考えることが必要となる複素関数の例を挙げ乍ら、Riemann 面について説明せよ。

(b) 複素関数 $f(z)$ は、$z = x + iy$ (x, y: 実) としたとき $f(x, y)$ という 2 変数関数と見なせるが、これを、$\bar{z} \equiv x - iy$ を用いて $f(z, \bar{z})$ という 2 変数関数と見なしたとき、Cauchy-Riemann 関係式から何が言えるか。

問 2　実関数 $\psi(x) = A/(x^2 + a^2)$ (x : 実変数、 a, A: 実定数) について、以下を residue を用いて求めよ。積分経路 C を含め、計算の過程を明示せよ。



(a) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ としたい。A をどうとればよいか。

(b) $\psi(x)$ の Fourier 変換 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\omega x} dx$ を求めよ。

問 3

(a) 解析接続 (analytic continuation) について知るところを述べよ。

(b) ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の満たす関数関係式を、ガンマ関数の定義を用いて求めよ。

(c) これにより、ガンマ関数がどのように解析接続されるかを（特異点にも言及しながら）述べよ。

物理学演習 I　期末試験　2010年1月21日

- 物理数学と電磁気学で解答用紙をわけること。
- 問題に不適切な部分があるときはその旨明記し適切に変更して答えよ。
- 解答は考え方がわかるように説明せよ。説明のない解答は点を与えない。

（電磁気学）

問題 1:
電場 $\vec{E}$、磁場 $\vec{B}$ は、スカラーポテンシャル ϕ 及びベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を導入することにより、

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1}$$

と表される。

(a) $\vec{E}, \vec{B}$ が Maxwell 方程式を満たすためには $\phi, \vec{A}$ はどのような方程式を満たさなければならないか。

(b) ϕ と $\vec{A}$ にローレンツ条件

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

を課しても一般性は失われないことを示せ。

問題 2:
電気双極子 $\vec{p} = q\vec{l}$ があるとき、十分遠方の場所における電位と電場を求め、座標軸の取り方に依存しない形式で表せ。

問題 3:
静止座標系 K 系から見て x 軸方向に速度 $\vec{V} = (V, 0, 0)$ で運動している慣性系 K' 系では点電荷 q が静止しているとする。K' 系での電磁ポテンシャルをローレンツ変換することにより、K 系での電位ポテンシャル ϕ とゲージポテンシャル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ が、

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}} \\ A_x = \frac{\gamma\beta q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}} \\ A_y = A_z = 0 \end{cases}$$

のように得られたとする。ここで $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$、$\beta = \frac{V}{c}$ (c は光速) であり、$(Vt, 0, 0)$ は点電荷が時刻 t にいる座標を表す。電場は公式 $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ で与えられる。
この状況から $y = -l (l > 0)$ に導体平板をおき、導体を接地したとする (電位を 0 とする)。このとき $y \gg l$ である遠方での電場と磁場の漸近的表式を求めよ。$V \to 0$ と $V \to c$ の振る舞いを説明せよ。ただし、粒子は導体平板から力を受けることなく等速に走り続けると仮定する。

(裏に続く)

(物理数学)

問題 1:
関数 $f(x)$ に対してその Fourier 変換 $F(k)$ とその逆変換は

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

と書かれる。$f(x), g(x)$ の Fourier 変換が $F(k), G(k)$ で与えられるとき次の関数の Fourier 変換を求めよ。

(a) $\delta(x)$, (b) 1, (c) $x^n f(x)$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$, (e) e^{-ax^2}.

問題 2:
次式で与えられる 2 次元の熱伝導方程式（拡散方程式）を考える。

$$\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (\kappa > 0) \qquad (*)$$

(i) $(*)$ の一般解を求めよ。ただし $t > 0$ で有界なものに限る。

z 方向に無限に長い四角柱 $(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ が温度 $u = T$ に保たれている。時刻 0 でこの四角柱を温度 0 の熱浴に浸した時、その後の $u(x, y, t)$ の時間変化を求めたい。ただし、温度は z 方向には一様、つまり u は z によらないとする。

(ii) 初期条件 $(u = T)$ は考えず、熱浴による境界条件のみを考慮したときの一般解が

$$u(x, y, t) = \sum_{mn} A_{mn} \exp\left[-\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\kappa t\right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

と書けることを示せ。

(iii) 初期条件も考慮したときの $u(x, y, t)$ の時間変化を求めよ。

問題 3:
次の微分方程式について考える。

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0$$

(i) $x = 1$ は確定特異点である。この点のまわりの解の一つを級数展開による方法で求めよ. (独立解は二つあるがその内 $x = 1$ の周りで正則な方を求めればよい)

(ii) $\nu = n\ (= 0, 1, 2, \cdots)$ の時, (i) の解は n 次多項式となることを説明せよ。

(iii) 特に、$x = 1$ での値を 1 としたものを Legendre 多項式と呼び、$P_n(x)$ で表す。$P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ の具体的な形を求めよ。

Legendre 多項式 $P_n(x)$ は、母関数 $G(x, t)$ を使って

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), \quad (|t| < 1, \quad -1 < x < 1)$$

と表すことができる。

(iv) 母関数表示を用いて、$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ を示せ。

(v) 母関数表示を用いて、$n \ge 1$ で次の漸化式が成り立つことを示せ。

(a) $(2n + 1)xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n + 1)P_{n+1}(x)$,

(b) $nP_n(x) = x\dfrac{dP_n(x)}{dx} - \dfrac{dP_{n-1}(x)}{dx}$.