物理数学 I　2010年度 冬学期 期末試験

1-2:30 pm, 18 November 2010

以下の3問を、各問毎に別の解答用紙に解答せよ。以下で z, w は複素変数である。
＊各用紙に、名前、学生証番号、**学科名、学年**を記入せよ。

問1 (a) 複素関数としての指数関数 e^z を無限級数として定義し、その収束半径を求めよ。また、この複素関数の、無限遠点における特異性を論ぜよ。

(b) Cauchy の積分公式を述べ、さらに、n 階導関数に対する同様な公式を与えよ。

問2 (a) ガンマ関数の、積分による定義

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

（ここで $\mathrm{Re}(z) > 0$）を用いて、関数関係式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を示せ。

(b) この定義において $t = ny$ と置きかえた式を用いて、

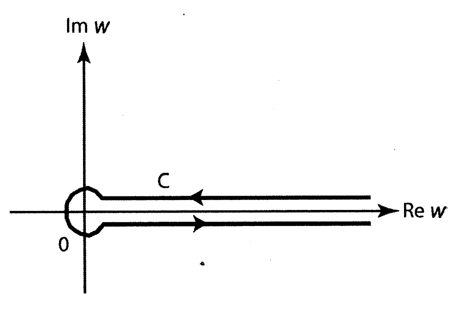
$$\int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{e^y - 1} dy = \zeta(z)\Gamma(z)$$

を示せ。ここでは $\mathrm{Re}(z) > 1$ を考え、$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ は zeta 関数。

(c) これと関連した積分

$$I(z) = \int_{\mathrm{C}} \frac{(-w)^z}{(e^w - 1)} \frac{dw}{w}$$

を考える。積分路は図のようにとる。各積分路からの寄与を計算することにより、



$$I(z) = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{e^y - 1} dy$$

を示せ。ここで $\mathrm{Re}(z) > 1$。

これと、Γ 関数の関係式 $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$ から、$\zeta(z), \Gamma(1-z), I(z)$ の間の関係を求めよ。

問 3 $-\pi < x < \pi$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ の Fourier 変換が

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

となることを示し、これを用いて $\zeta(2)$ の値を求めよ。