

目次

1.	はじめに.....	2
2.	目的.....	2
3.	参考文書.....	2
4.	アラン分散とは.....	3
5.	アラン分散の定義.....	3
6.	アラン分散の計算方法.....	4
7.	アラン分散計算プログラム.....	6
8.	グラフの読み取り方.....	9
9.	アラン分散関係の参考資料.....	10

1. はじめに

本文書は、ジャイロもしくは周波数発振器などの性能評価にしばしば用いられるアラン分散について記したものである。

2. 目的

本文書は、アラン分散の概念及び計算方法、そして評価方法について述べ、アラン分散を用いた解析のノウハウを習得することを目的とする。

3. 参考文書

参考文書を以下に示す。

The Science of Timekeeping Application Note 1289 HEWLETT PACKARD

4. アラン分散とは

アラン分散とは、ジャイロや周波数発振器などの特性評価に用いられる指標の1つである。元々は、GPS 衛星に搭載する精密な時計の性能評価のために開発された指標であるが、最近では専らジャイロの特性評価に用いられている。アラン分散からは、評価対象となるモデルもしくはセンサのノイズ特性を評価することができ、センサ間の性能や性能のトレンドを評価することができる。図 1 に典型的なアラン分散の例を示す。

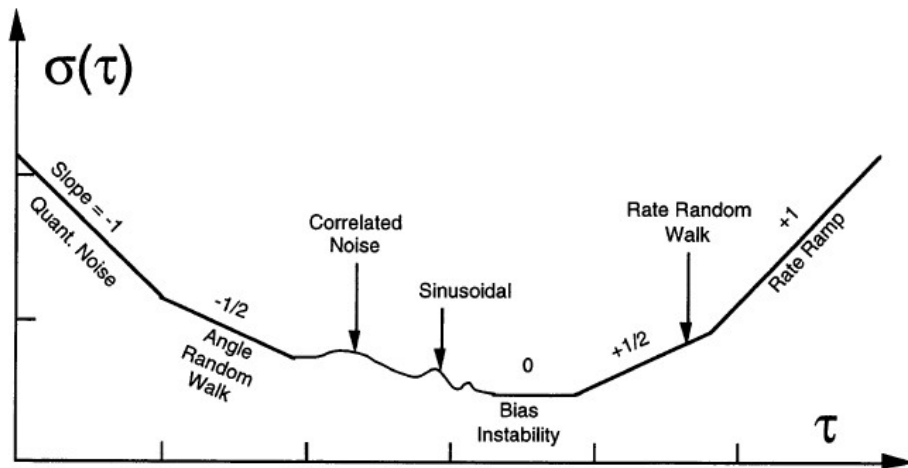


Figure C.8— $\sigma(\tau)$ Sample plot of Allan variance analysis results

図 1 典型的なアラン分散

アラン分散は、測定時間間隔 τ と、その時間間隔で平均したデータの分散 σ の関係を示したもので、横軸に測定時間間隔 τ 、縦軸にアラン分散 σ をとることで、センサなどのノイズ特性を評価することができる(図 1)。

5. アラン分散の定義

アラン分散は、表 1 のように定義される。

表 1 アラン分散の定義

略称	名前	定義式
AVAR	Two-Sample or Allan Variance	$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\omega_{k+m} - \omega_k)^2 \rangle$
MVAR	Modified Allan Variance	$\sigma_M^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{\omega}_{k+m} - \bar{\omega}_k)^2 \rangle$
TVAR	Time Variance	$\sigma_T^2(\tau) = \frac{\tau^2}{3} \sigma_M^2(\tau)$

6. アラン分散の計算方法

表 1 のアラン分散の定義から、実際のデータを用いてアラン分散の計算方法について示す。ジャイロなどのセンサの場合、得られるデータは、離散的な角度もしくは角速度である。ここでは図 2 のような角度データが得られたとする。

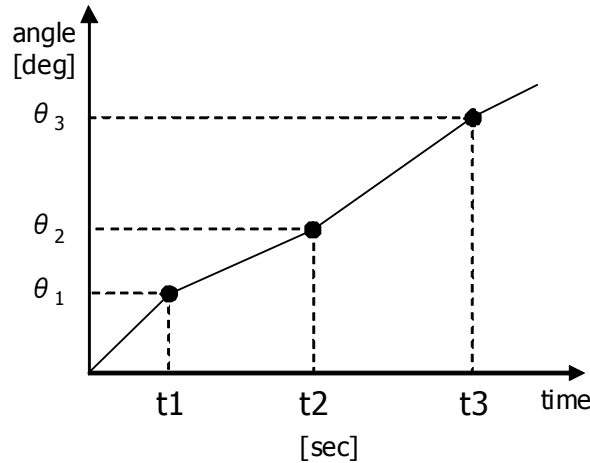


図 2 角度データ(例)

ここで、時間 t_1 のときにおける角速度 ω_1 は、以下式で表すことができる。

$$\omega_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \text{ [deg/s]} \quad 1$$

データのサンプリング間隔 τ_0 が一定だとすると、 $t_2 - t_1 = \tau_0$ であるから、1 式は以下のように書ける。引数である τ_0 は、平均時間間隔を表している。

$$\omega_1(\tau_0) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\tau_0} \text{ [deg/s]} \quad 2$$

2 式を k 番目のデータ(角速度 ω_k) について拡張すると、

$$\omega_k(\tau_0) = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\tau_0} \text{ [deg/s]} \quad 3$$

となる。これで平均時間間隔 τ_0 における角速度が求められたことになる。次に、平均時間間隔を $2\tau_0$ とした場合について考えると 3 式は以下のように書ける。

$$\omega_k(2\tau_0) = \frac{\theta_{k+2} - \theta_k}{2\tau_0} \text{ [deg/s]} \quad 4$$

データのサンプリング間隔 τ_0 を平均時間の最小単位とし、平均時間を m 倍にした場合について考えると、4 式は以下のように拡張できる。

$$\omega_k(\tau) = \frac{\theta_{k+m} - \theta_k}{\tau} = \frac{\theta_{k+m} - \theta_k}{m\tau_0} \text{ [deg/s]} \quad 5$$

ここで、 $\tau = m \tau_0$ である。したがって、 $\omega_k(\tau)$ とは平均時間 τ における時間 $k \tau_0$ における角速度[deg/s]を表していることになる。アラン分散(ADEV)の定義によると、アラン分散は以下式で表される。

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\omega_{k+m} - \omega_k)^2 \right\rangle \quad 6$$

5式を用いると6式は以下のように書き直せる。

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left\langle (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2 \right\rangle \quad 7$$

7式における $\langle \rangle$ は、アンサンブル平均と呼ばれるもので、例えば、次のように展開することができる。

$$f(t) = \langle x_{k+1} - x_k \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \quad 8$$

ここで、 N は全データのサンプリング数に相当する。加算数が $N-1$ となっているのは、右辺の式が x_{k+1} であるため、全データ数 N から -1 している($N+1$ 番目のデータが存在しないため)。平均のための割り算も加算数で割ることになるため、 $N-1$ となる。8式を7式に適用すると、7式は以下のように書き直すことができる。

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2(N-2m)} \sum_{k=1}^{N-2m} (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2 \quad 9$$

次に修正アラン分散(MDEV)の場合について考える。修正アラン分散は、センサ特性などによるオフセットの影響を受けないようアラン分散(ADEV)を修正したものである。

$$\sigma_M^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\bar{\omega}_{k+m} - \bar{\omega}_k)^2 \right\rangle \quad 10$$

10式に5式を適用すると、

$$\sigma_M^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{1}{\tau} (\bar{\theta}_{k+2m} - 2\bar{\theta}_{k+m} + \bar{\theta}_k) \right)^2 \right\rangle \quad 11$$

を得る。11式のアンサンブル平均を展開すると、以下を得る。

$$\sigma_M^2(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{N-2m} \sum_{k=1}^{N-2m} \left(\frac{1}{\tau} (\bar{\theta}_{k+2m} - 2\bar{\theta}_{k+m} + \bar{\theta}_k) \right)^2 \quad 12$$

ここで、 $\bar{\theta}_k$ は時間平均を意味しており、 m を用いて表すと以下のように展開することができる。

$$\bar{\theta}_k = \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\theta_k}{m} \right) \quad 13$$

したがって、 $\bar{\theta}_{k+2m} - 2\bar{\theta}_{k+m} + \bar{\theta}_k$ に13式を適用すると、

$$\bar{\theta}_{k+2m} - 2\bar{\theta}_{k+m} + \bar{\theta}_k = \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k}{m} \right) \quad 14$$

14 式を 12 式に適用し、計算範囲を調整すると、以下式を得ることができる。

$$\sigma_M^2(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{m^4 \tau^2} \frac{1}{N-3m} \sum_{k=1}^{N-3m} \left(\sum_{j=k}^{k+m} \theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k \right)^2 \quad 15$$

ADEV の場合は 9 式を、MDEV の場合は 15 式を用いることで、実データからアラン分散を算出することができる。

7. アラン分散計算プログラム

perl にて開発したアラン分散 (ADEV, MDEV) 計算プログラムを示す。\$tau0 には、データのサンプリング間隔[sec]を指定する(下記の場合は、0.1sec)。シェル上¹で処理したいデータファイル(1 列目にデータが入っていること)を指定すると、標準出力に結果が出力される。

表 2 アラン分散計算プログラム(perl)

```
#!/usr/bin/perl
# 以下は変更する必要なし
#-----
#
#
# degs2allan (version $Id: eodv,v 1.4 2007/05/22 02:22:33 Exp $)
#
# Allan 分散の算出
#
# Usage:
# > degs2allan.pl hogehoge.csv
#
# options:
#     特に無し
#
# example:
# degs2allan.pl hogehoge.csv # (1)
#-----
# Libraries
my @omg;
my @MDEV;
my @ADEV;

# tau[sec]
my $tau0= 0.1;
my @tau;
my @ave;
my @D;

my $n=      0;
my $m=      =      1;
my $s=      0;
my $v=      0;

#-----
# Code begin
#-----
```

¹ 計算プログラムを動作させるには、別途 perl 環境をインストールする必要がある。AL2-I09-A011 を参考のこと。

```

($opt) = @ARGV;
if ($opt eq "-h")
{
    &show_usage();
    exit;
}

# オプションがない場合
if ($#ARGV == -1)
{
    print "Error:ファイル名を指定してください\n";
}

# オプションが1つある場合
if ($#ARGV == 0)
{
    # 対象ファイルのオープン
    open(IN,"<$ARGV[0]") || die "Error: can't open $ARGV[0]\n";
    @line = <IN>;
    close(IN);

    $cnt = 0;

    # ファイル読み込み(角速度読み込み)
    foreach (@line)
    {
        # 角度[deg/s]
        $omg[$cnt] = (split(/,/,$_))[0];

        # インクリメント処理
        $cnt++;
    }

    my $MAX = int(1+log10(($cnt - 1.0)/3.0)/log10(2.0));

    $m = 1;

    # Allan 分散算出
    for($i=0;$i<$MAX;$i++)
    {
        # 1.tau 計算
        $tau[$i] = $m*$tau0;

        # 2.差分値
        $s = 0;
        $v = 0;
        for($k=0;$k<$m;$k++)
        {
            $s = $s + $omg[$k];
            $v = $v + $omg[$k+$m];
        }
        $D[0] = ($v - $s)/$m;

        # 3.D 算出
        for($k=1;$k<$cnt+1-2*$m;$k++)
        {
            $D[$k] = $D[$k-1] + ($omg[$k-1]-2*$omg[$k+$m-1]+$omg[$k+2*$m-1])/m;
        }

        # 4.ADEV
        $s = 0;
        for($k=0;$k<$cnt+1-2*$m;$k++)
        {
            $v = $D[$k]**2;
            $s = $s + $v;
        }
        $ADEV[$i] = sqrt($s/($cnt+1-2*$m)/2);
    }
}

```

```

# 5.MDEV 算出
$v = 0;
for($j=0;$j<$cnt+2-(3*$m);$j++)
{
    $s = 0;
    for($k=0;$k<$m;$k++)
    {
        $s = $s + $D[$j+$k];
    }
    $v = $v + $s*$s;
}
$v = $v/($cnt + 2 - 3*$m);
$MDEV[$j] = sqrt($v/2)/$m;

# 5.m 値のインクリメント
$m = $m*2;
}

# 出力
for($j=0;$j<$MAX;$j++)
{
    $disp = sprintf("%e,%e,%e\n", $tau[$j], $MDEV[$j], $ADEV[$j]);
    print $disp;
}

}

# オプションが2つある場合
if ($#ARGV == 1)
{
}
exit;

#-----
# Sub code begin
#-----
sub show_usage()
{
    print "Usage:\n";
    print "> csv2allan [-h]\n";
    print "\n";
    print "options:\n";
    print "    -h : 利用方法を提示する\n";
    print "\n";
    print "example:\n";
    print "eodv -h                #(1) HELP\n";
}

sub log10 {
    my $n = shift;
    return log($n)/log(10);
}

```


8. グラフの読み取り方

上節での式展開からも分かるように、アラン分散は τ の関数として得られる。一般的に、両軸 log スケールで、 $\tau - \sigma(\tau)$ にてプロットする。図 3 に例を示す。 τ の単位は [sec]、 σ の単位が [deg/s] である。一般的なアラン分散は、バスタブ曲線を描く(図 3 の MDEV)。

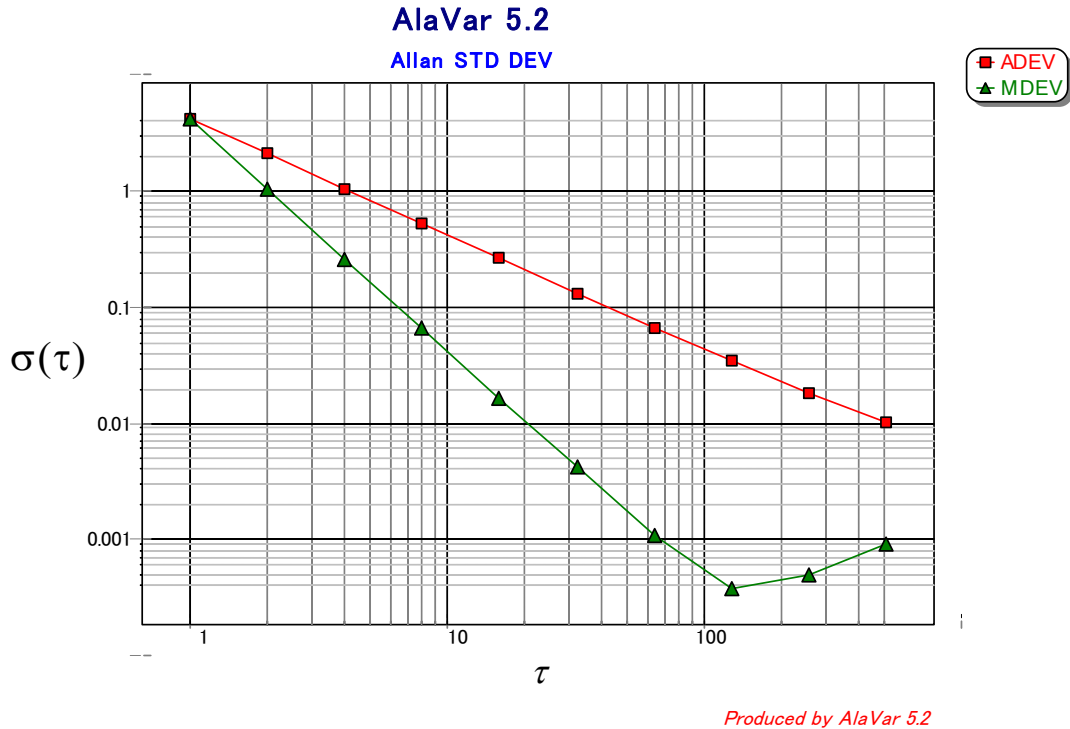


図 3 アラン分散(例)

アラン分散がこのようなバスタブ曲線を描く理由は、次のセンサモデルで説明することができる。ここで、 θ は角度、 ω が角速度を表している。

$$\theta = \int \omega dt$$

$$\omega = \omega_0 + b + \eta_1$$

$$\dot{b} = \eta_2$$

b は角速度の RW (Random Walk) 成分であり、 η_1 はホワイトノイズ成分を意味している。 τ が微小の時は、RW 成分はほとんど無視することができる。よって、 τ が比較的小さい領域では、 η_1 が支配的な成分となるが、平均時間 τ を大きくするにつれ、ホワイトノイズの影響を小さくすることができる。そのため、右肩下がりの曲線となる。さらに τ を大きくしていくと、 η_1 の影響はさらに小さくすることができるが、RW 成分の影響が無視できなくなってくる。 τ が大きくなっているため、変動量が大きくバラついてしまうためである。そのため、ある平均時間以上からは、右肩上がりの曲線となる。

一般的に、左下に曲線があるほど、性能の良いセンサであることを意味し、右上にあるほど、悪い(もしくは性能の劣化)を表していることになる。

9. アラン分散関係の参考資料

日本においてアラン分散による評価は、余り一般的ではなく、ごくごく一部の業界においてのみ使用されているのが現状である。そのため、日本語の資料はほとんどないといつてよい。フリーソフトでアラン分散を計算できるツールがある「AlaVar」といい下記²にてダウンロードすることができる。

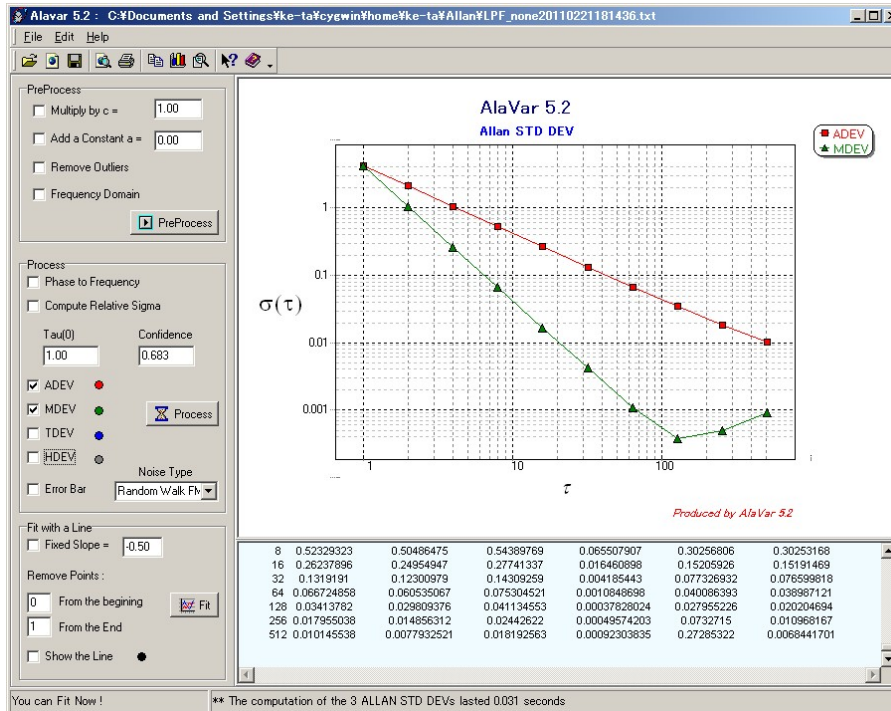


図 4 AlaVar 画面

また、同サイトでは C 言語と MATLAB³によるアラン分散計算コードが公開されているので、参考にとすると良い。

² http://www.alamath.com/index.php?option=com_content&task=blogsection&id=4&Itemid=30

³ http://www.alamath.com/index.php?option=com_content&task=view&id=19&Itemid=31