

## 目次

|    |                        |   |
|----|------------------------|---|
| 1. | はじめに.....              | 2 |
| 2. | 目的.....                | 2 |
| 3. | 参考文書.....              | 2 |
| 4. | デジタル・フィルタとは.....       | 3 |
| 5. | IIR フィルタ .....         | 3 |
| 6. | LPF フィルタの設計 .....      | 4 |
| 7. | LPF フィルタの特性評価.....     | 5 |
| 8. | デジタル・フィルタのプログラミング..... | 6 |
| 9. | デジタル・フィルタの検証.....      | 7 |

## 1. はじめに

本文書は、デジタル・フィルタの概要及び計算手法などについて記したものである。

## 2. 目的

本文書は、デジタル・フィルタについて学習し、一般的なデジタル・フィルタを設計できるようになることを目的とする。

## 3. 参考文書

参考文書を以下に示す。

\*\*\*-\*\*\*-A011 「Cygwin インストール方法について」

#### 4. デジタル・フィルタとは

電子工学において、デジタル・フィルタ(Digital Filter)は、量子化及び標本化を行った離散時間信号に対して、デジタル信号処理を行うことによって働く、フィルタ回路の一種である。一般的に、アナログ領域におけるフィルタといえば、電子部品などの物理的な部品(コンデンサやインダクタなど)によって構成されるものをさすが、デジタル・フィルタは事実上数学の関数かアルゴリズム(無形)によって、同種のフィルタ効果を実現できる点が大きくことなる。

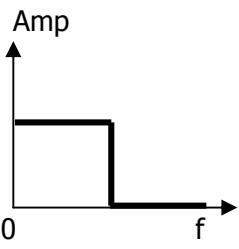
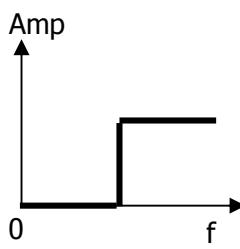
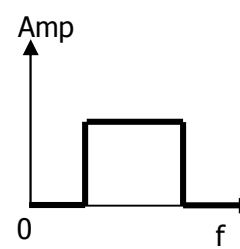
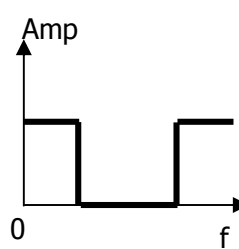
デジタル・フィルタには、大別して FIR フィルタ(Finite Impulse Response)と IIR フィルタ(Infinite Impulse Response)がある。FIR フィルタは一般的にインパルス応答が有限時間で終わるもの(フィードバックがない)ものをさし、IIR フィルタはインパルス応答が無限時間続くもの(フィードバックがある)をいう。

表 1 デジタル・フィルタの種類

|         | FIR フィルタ        | IIR フィルタ |
|---------|-----------------|----------|
| 直線・位相特性 | 厳密に実現可能         | 実現困難     |
| 安定性     | 常に安定            | 不安定になりうる |
| フィルタ次数  | 多い<br>計算に時間がかかる | 少ない      |

そもそもフィルタとは、測定したデータに何らかの信号処理を施し、原信号を得ることを「フィルタリング」あるいは「フィルタ処理」といい、フィルタリングを行うものをフィルタと呼ぶ。先にも述べたようにアナログ・フィルタにて実現可能なものは、すべてデジタル・フィルタにて実現することができる。一般的によく用いられるフィルタの種類を表 2 に示す。

表 2 フィルタの種類

| ローパスフィルタ<br>LPF                                                                     | ハイパスフィルタ<br>HPF                                                                     | バンドパスフィルタ<br>BPF                                                                     | バンドストップフィルタ<br>BSF                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

#### 5. IIR フィルタ

先にも述べたように、IIR フィルタはインパルス応答が無限に継続するフィルタ(フィードバックがある)のことで、一般的に以下の差分方程式にて定義される。

$$y[n] = \sum_{m=1}^M a_m y[n-m] + \sum_{k=0}^K b_k x[n-k] \quad 1$$

ここで、 $x[n]$ は入力信号、 $y[n]$ は出力信号を表している。この式にて表現されるフィルタの特性は、係数  $a_m$  ( $m=1,2,\dots,M$ ) と  $b_m$  ( $m=0,1,\dots,K$ ) にて決定される。ここでは、簡略化のために、 $M=K$  とする(このようにしても 1 式の一般性は失われない)。よって、1 式は以下のように書き直すことができる。

$$y[n] = \sum_{m=1}^M a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad 2$$

このフィルタの伝達関数  $H(z)$  は、2 式から次のようになる。

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}} \quad 3$$

3 式の分母は  $z^{-1}$  に関しての  $M$  次式になっている。そのため、このような伝達関数をもつ IIR フィルタを  $M$  次の IIR フィルタと呼ぶ。

## 6. LPF フィルタの設計

ここでは、2 次の LPF (Low-pass filter) フィルタを設計する。LPF フィルタは、以下のパラメータから決めることができる。

表 3 必要パラメータ

| 項目    | 内容                                        |
|-------|-------------------------------------------|
| $F_s$ | デジタル信号のサンプリング周波数[Hz]                      |
| $f_0$ | 特性周波数[Hz]<br>LPF ならカットオフ周波数に該当する          |
| $Q$   | $Q$ 値 $= 1/(2\xi)$<br>$\xi$ は、減衰係数を意味している |

2 次のフィルタなので、3 式は以下のようになる。

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad 4$$

また、表 3 のパラメータから係数  $a_m$ 、 $b_m$  値を求めることができる。以下に算出時に使用する中間パラメータを示す。

$$\omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{F_s}\right) \quad 5$$

$$a = \frac{\sin \omega_0}{Q} \quad 6$$

係数  $a_m$ 、 $b_m$  値の導出式を以下に示す。ここでは、バタワース特性による双一次変換という手法を用いて各係数を決定している。

$$b_0 = \frac{1 - \cos \omega_0}{2(1 + a)} \quad 7$$

$$b_1 = \frac{1 - \cos \omega_0}{1 + a} \quad 8$$

$$b_2 = \frac{1 - \cos \omega_0}{2(1 + a)} \quad 9$$

$$a_1 = \frac{2 \cos \omega_0}{1 - a} \quad 10$$

$$a_2 = \frac{a - 1}{a + 1} \quad 11$$

## 7. LPF フィルタの特性評価

ここでは, 実際にパラメータを設定し, LPF を設計・検証する. 表 4 の条件にて各係数を計算した.

表 4 LPF 設計パラメータ

| 項目         | 値        | 単位    | 備考                  |
|------------|----------|-------|---------------------|
| $F_s$      | 10       | Hz    |                     |
| $f_0$      | 0.5      | Hz    | カットオフ周波数            |
| $Q$        | 0.707    | -     | $\xi = 0.707$ とした   |
| $\omega_0$ | 0.158384 | rad/s | 周波数: 0.025208[Hz]相当 |
| $b_0$      | 0.005117 | -     |                     |
| $b_1$      | 0.010234 | -     |                     |
| $b_2$      | 0.005117 | -     |                     |
| $a_1$      | 1.614827 | -     |                     |
| $a_2$      | -0.6353  | -     |                     |

設計した LPF の周波数特性を検証する. 4 式をブロック図にすると, 以下のように表現することができる. 入力と出力を比較することで, フィルタの周波数特性を評価することができる<sup>1</sup>.

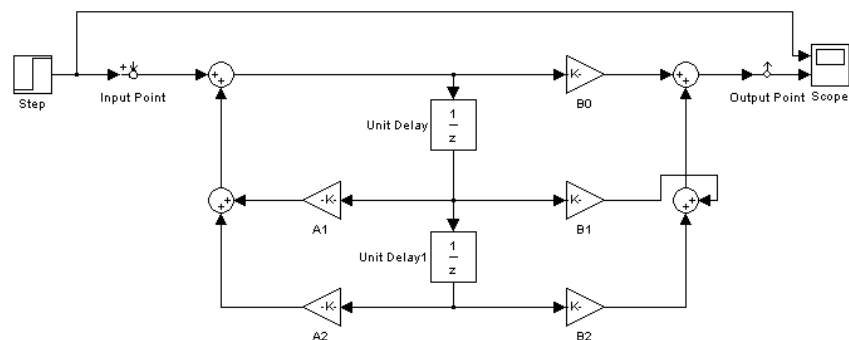


図 1 2次フィルタブロック図

<sup>1</sup> MATLAB の線形解析機能を使用した.

図 2 に設計した LPF の周波数特性を示す。カットオフ周波数(0.5[Hz])付近で, Gain が急激に落ち込んでいることが分かる(0.5Hz 以上の周波数帯はカットされる)。これは本式による設計としては正しいが, アナログ・フィルタにおける LPF の設計では, Gain の落ち始め(ここでは, 0.025Hz 付近)が 0.5Hz になるよう設計するのが一般的である。いわゆるアナログ・フィルタとして設計したい場合は,  $\omega_0$  の値を希望のカットオフ周波数[Hz]に合うよう設計するとよい。

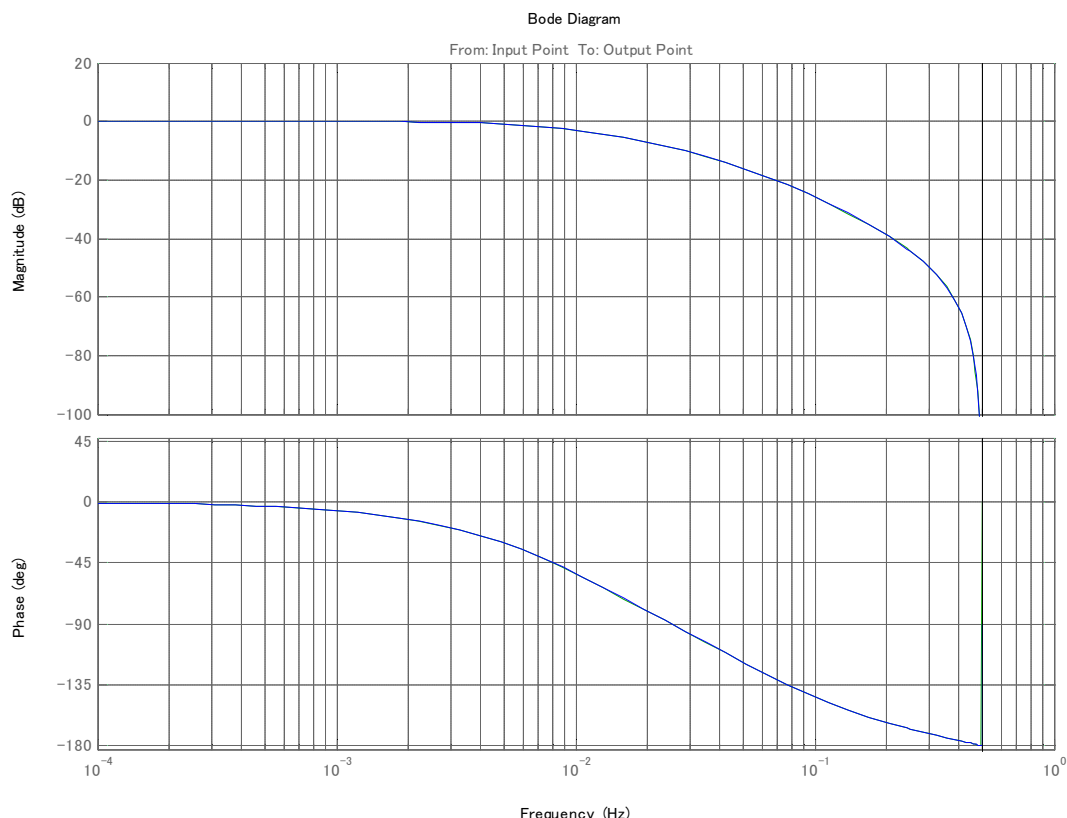


図 2 設計した LPF の周波数特性(ボード線図)

## 8. デジタル・フィルタのプログラミング

設計したデジタル・フィルタはプログラム化し, マイコンや PC 上にて動作させることができる。図 1 をプログラム化したものを表 5 に示す。デジタル・フィルタは, 数式(アルゴリズム)にて, 完全に記述可能である点が特に優れている。物理的な制約を受けず, あらゆるプラットフォームに適用することができる。

表 5 プログラム化した LPF(C 言語)

```
#include<stdio.h>

#define A1  1.614827292
#define A2 -0.635295662
#define B0  0.005117092
#define B1  0.010234185
#define B2  0.005117092

static double pre1,pre2;
```

```

double LPF(double inp);

int main()
{
    int i;
    double P = 0;

    for(i=0;i<100;i++)
    {
        if(i==1) P = 1;

        printf("%d,%e,%e\n",i,P,LPF(P));
    }
    return 0;
}

double LPF(double inp)
{
    double reg,out;

    reg = inp + A1*pre1 + A2*pre2;
    out = B0*reg + B1*pre1 + B2*pre2;

    pre2 = pre1;
    pre1 = reg;

    return out;
}

```

## 9. デジタル・フィルタの検証

プログラム化したデジタル・フィルタの健全性について検証した。図 1 の LPF にインパルス（振幅 1）を入力し、その応答をシミュレーションした。図 1 の上図が入力信号（インパルス）、下図が出力信号（LPF 通過後）である。高周波成分がカットされ、波形が鈍っていることが分かる。

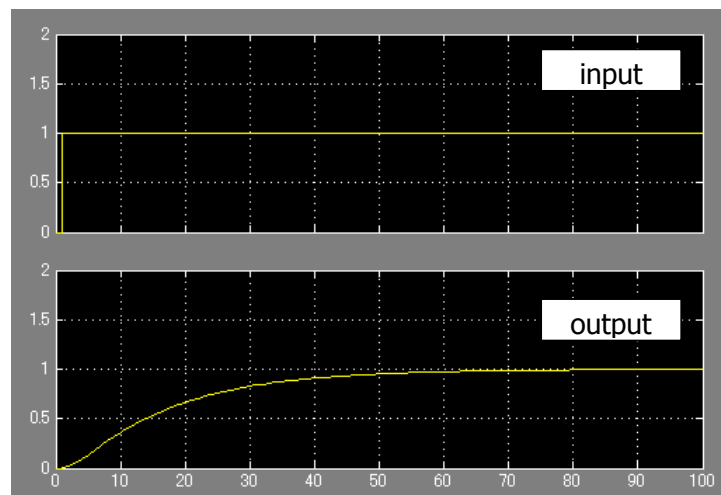


図 3 LPF シミュレーション結果

次に、プログラム化した LPF に、同様の入力信号を与えたときの出力結果を図 4 に示す。出力結果は、シミュレーション結果と良い一致を見た。正しく設計した LPF がプログラム化されている。

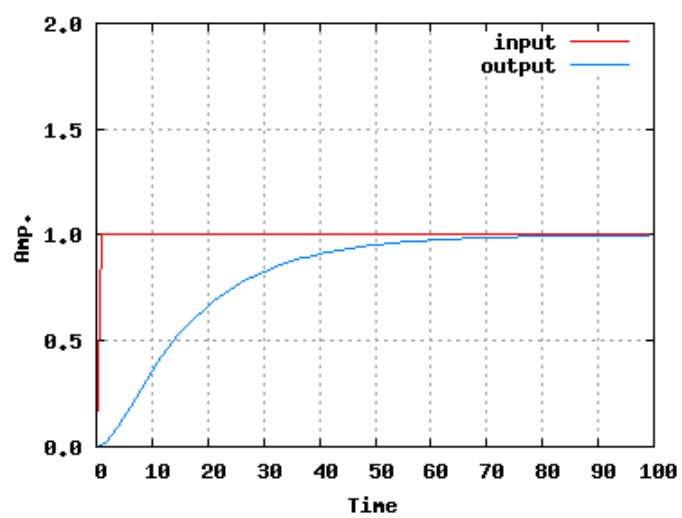


図 4 プログラム化した LPF の動作結果